

Série A, n° 3637

N° D'ORDRE : 4509

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean KIEFFER

1^{re} THÈSE. — Contribution à l'étude des ondes permanentes et des ondes de choc dans les milieux denses.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 10 décembre 1959 devant la Commission d'examen.

MM. RIBAUD.... *Président.*

BRUN.....	} <i>Examineurs</i>
GERMAIN ..	
VODAR....	} <i>Invités.</i>
MANSON. . .	

PARIS

IMPRIMERIE NATIONALE

1962

Série A, n° 3637

N° D'ORDRE : 4509

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean KIEFFER

1^{re} THÈSE. — Contribution à l'étude des ondes permanentes et des ondes de choc dans les milieux denses.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 10 décembre 1959 devant la Commission d'examen.

MM. RIBAUD.... *Président.*

BRUN..... } *Examineurs.*

GERMAIN... }

VODAR..... } *Invités.*

MANSON... }

PARIS

IMPRIMERIE NATIONALE

1962





Digitized by the Internet Archive
in 2026

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... J. PÉRÈS

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	DUBREIL.....	T	Arithmétique et théorie des nombres.
DE BROGLIE.....	T	Théories physiques.	QUELET.....	T	Chimie organique.
PRENANT.....	T	Anatomie et histologie comparés.	CAGNIARD.....	T	Géophysique appliquée
PÉRÈS.....	T	Mécanique des fluides et applications.	CHAMPETIER.....	T	Chimie macromoléculaire.
BARRABE.....	T	Géologie structurale et géologie appliquée	CUVILLIER.....	T	Micropaléontologie.
BOURCART.....	T	Géographie physique et géologie dynamique.	JUNG.....	T	Pétrographie.
PLANTEFOL.....	T	Botanique.	TRILLAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.
GRASSE.....	T	Évolution des êtres organisés.	WIEMANN.....	T	Chimie organique et structurale.
PREVOST.....	T	Chimie organique.	JACQUINOT.....	T	Spectroscopie et physique céleste.
BOULIGAND.....	T	Application de l'analyse à la géométrie.	VASSY.....	T	Physique de l'atmosphère.
CHAUDRON.....	T	Chimie appliquée.	DESTOUCHES.....	T	Théories physiques.
WYART.....	T	Minéralogie.	M. PRUVOST.....	T	Géologie.
TEISSIER.....	T	Zoologie.	AMIEL.....	T	Chimie générale.
MANGENOT.....	T	Biologie végétale.	HOCART.....	T	Minéralogie.
P. AUGER.....	T	Physique quantique et relativité.	J.-P. MATHIEU.....	T	Physique (option) [Orsay].
MONNIER.....	T	Physiologie générale.	COUTEAUX.....	T	Biologie animale (P.C.B.).
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.	MAY.....	T	Zoologie (Orsay).
ROCARD.....	T	Physique (E.N.S.).	CHOQUET.....	T	Théorie des fonctions et topologie.
H. CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. S.).	FELDMANN.....	T	Biologie végétale marine.
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.	GUINIER.....	T	Physique des solides.
FAVARD.....	T	Géométrie supérieure.	JOST.....	T	Physiologie comparée.
COULOMB.....	T	Physique du globe.	FORTET.....	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.
COUSIN (M ^{lle}).....	T	Biologie animale (S.P.C.N.).	SCHWARZ.....	T	Calcul différentiel et intégral.
CHRÉTIEN.....	T	Chimie minérale.	CHOUARD.....	T	Physiologie végétale.
P. DRACH.....	T	Zoologie.	MALAVARD.....	T	Aviation.
KASTLER.....	T	Physique (E.N.S.).	BRELOT.....	T	Calcul différentiel.
EPHROSSI.....	T	Génétique.	NORMANT.....	T	Synthèse organique.
WURMSER.....	T	Biologie physico-chimique.	BÉNARD.....	T	Chimie minérale.
RIVIÈRE.....	T	Géologie (S.P.C.N.) Orsay.	BUVAT.....	T	Botanique (E.N.S.).
GAUTHERET.....	T	Biologie végétale (P.C.B.).	DUGUÉ.....	T	Statistiques mathématiques.
LUCAS.....	T	Recherches physiques.	GELOSO.....	T	Chimie (S.P.C.N.).
A. THOMAS.....	T	Biologie cellulaire.	SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie.
ARNULF.....	T	Optique appliquée.	ULRICH.....	T	Physiologie végétale.
M. MORAND.....	T	Enseignement de physique.	MARÉCHAL.....	T	Optique théorique et appliquée.
SOLEILLET.....	T	Physique (P.C.B.).	KIRRMANN.....	T	Théories chimiques.
FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	CHADEFAUD.....	T	Botanique.
DANJON.....	T	Astronomie.	DESTRIAU.....	T	Physique (M.P.C.).
PETIT.....	T	Biologie maritime.	LE BRETON (M ^{lle}).....	T	Physiologie générale.
QUENEY.....	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	SALEM.....	T	Mathématiques générales.
GALLIEN.....	T	Embryologie.	LELONG.....	T	Mathématiques générales.
EICHORN.....	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).	DEVILLERS.....		Anatomie et histologie comparées.
DE CUGNAC.....	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).	EHRESMANN.....	T	Topologie algébrique.
CAUCHOIS (M ^{lle}).....	T	Chimie physique.	FRANÇON.....	T	Physique (S.P.C.N.).
THELLIER.....	T	Physique du globe.	GLANGEAUP.....	T	Géographie physique et géologie dynamique
L'HÉRITIER.....	T	Génétique.	GODEMENT.....	T	Mathématiques (M.G.P.).
GRIVET.....	T	Radioélectricité.	PISOT.....	T	Technique mathématique de la physique.
PONCIN.....	T	Mécanique générale.			

ROCH E.....	T	Géologie.	TEILLAC.....	Physique nucléaire e radioactivité.
SCHATZMANN.....		Astrophysique.	TONNELAT.....	Biologie psychochi mique.
TERMIER.....	T	Paléontologie strati- graphique.	VILLE.....	T Économétrie.
ZAMANSKY.....	T	Mathématiques géné- rales.	WILLEMART.....	Chimie (P.C.B.).
LENNUIER.....		Physique (M.G.P.).	DODÉ.....	T Chimie (S.P.C.N.). [Orsay].
RIZET.....		Génétique.	FREYMAN.....	T Physique générale.
ROUTHIER.....		Géologie appliquée.	GUINOCHE.....	T Biologie végétal (Orsay).
TONNELAT (M ^{me}).....	T	Relativité.	ROLLET.....	T Chimie (P.C.B.).
DIXMIER.....	T	Ma t h é m a t i q u e s (M.P.C.).	JOSIEN (M ^{lle}).....	T Chimie (P.C.B.).
SOUCHAY.....	T	Chimie générale.	CHEVALLEY.....	T Géométrie algébriqu et théorie de groupes.
AIGRAIN.....	T	Electrotechnique gé- nérale.	ARNOULT.....	T Electronique.
BRUSSET.....		Chimie minérale.	CHAPELLE.....	T Physique (M.P.C.) [Orsay].
M. LÉVY.....	T	Physique théorique des hautes énergies.	DELANGE.....	T M a t h é m a t i q u e (Orsay).
CHAIX (M ^{me}).....		Chimie biologique.	DENY.....	T M a t h é m a t i q u e (M.G.P.).
HUREL-PY (M ^{me}).....		Biologie végétale (P.C.B.).	GERMAIN.....	T Mécanique théoriqu des fluides.
PIAUX.....		Chimie (M.P.C.).	G. LUCAS.....	T Géologie.
BRUN.....		Mécanique expérimentale des fluides.	ALLARD.....	Chimie physique.
LEDERER.....	T	Chimie biologique.	BERTHELOT.....	Physique nucléaire e radioactivité.
DUBREIL (M ^{me}).....	T	Mathématiques.	BRICARD.....	Météorologie et phy sique de l'atmos phère.
LELONG (M ^{me}).....	T	M a t h é m a t i q u e s (E.N.S.).	ALBÉ-FESSARD (M ^{me}).....	Psycho-physiologie.
BELLAIR.....	T	Géologie (S.P.C.N.).	FRIEDEL.....	Physique des solides.
COTTE.....	T	Physique (Orsay).	M. JULIA.....	Étude des molécule organiques com plexes.
J.-E. DUBOIS.....	T	Chimie organique.	LENDER.....	Biologie animat (S.P.C.N.) [Orsay].
LAMOTTE.....		Zoologie (E.N.S.).	MAGAT.....	Physico-chimie de rayonnements.
André MICHEL.....	T	Chimie (S.P.C.N.).	QUINTIN (M ^{lle}).....	Électrochimie.
OLMER.....	T	Énergétique générale.	MONOT.....	T Chimie du métabo lisme.
ROUAULT.....	T	Physique générale.	BENOIT.....	T Physiologie animale.
GAUTHIER.....	T	Mécanique appliquée.	DE POSSEL.....	T Analyse numérique.
BARCHEWITZ.....		Chimie physique.	CHARLOT.....	T Chimie analytique.
BROSSEL.....		Physique atomique.	HAÏSSINSKY.....	T Radiochimie.
BUSER.....		Physiologie comparée.		
CAMUS.....		Physiologie végétale (3 ^e cycle).		
CASTAING.....		Physique générale.		
CURIEN.....		Minéralogie et cristal- lographie.		
MOYSE.....		Physiologie végétale (Orsay).		
PANNETIER.....		Chimie (S.P.C.N.).		
POSSOMPES.....		Zoologie.		
PULLMANN.....		Chimie théorique.		

Secrétaire général..... C. MONIER

À LA MÉMOIRE DE MON PÈRE ,

À LA MÉMOIRE DE MA GRAND'MÈRE ;

À MA FEMME ;

À MA MÈRE ;

À MA SŒUR.

« Il semble bien ne pas s'être trompé sur la
« généalogie, celui qui a dit qu'Iris est la fille
« d'Étonnement. »

(PLATON, *Théétète*.)

« La marche naturelle, c'est d'aller des choses
« les plus connaissables pour nous et les plus claires
« pour nous à celles qui sont plus claires en soi et
« plus connaissables; car ce ne sont pas les mêmes
« choses qui sont connaissables pour nous et
« absolument. »

(ARISTOTE, *Physique*.)

« Il faut aimer la science parce qu'elle est une
« grande œuvre de l'esprit. »

(LOUIS DE BROGLIE.)

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES ONDES PERMANENTES ET DES ONDES DE CHOC DANS LES MILIEUX DENSES ⁽¹⁾

PAR

M. J. KIEFFER

LABORATOIRE DES HAUTES PRESSIONS

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE (MEUDON-BELLEVUE)

DIRECTION DES ÉTUDES ET FABRICATIONS D'ARMEMENT (SAINT-CLOUD)

Résumé. — *Un des problèmes difficiles et importants de la théorie des solides est celui de leur équation d'état. Deux points de vue sont possibles.*

On peut ignorer la rigidité du solide et se contenter d'en exprimer les propriétés de compression hydrostatique par une relation entre la température, la densité et la pression isotrope, comme cela se fait pour les fluides. Le point de vue se justifie aux très hautes pressions hydrostatiques par rapport auxquelles les modules de rigidité sont négligeables. Il s'applique encore aux ondes de choc intenses (de pression supérieure à 100 kilobars) lorsqu'on veut calculer l'état de quasi-équilibre que prend le solide derrière le front de l'onde.

L'autre point de vue — qui est celui du présent mémoire dans sa partie théorique — tient compte de la rigidité et de l'anisotropie correspondante du solide. De ce fait il a donc surtout de l'intérêt pour des sollicitations d'intensité faible et moyenne. En sollicitation statique on sait que pour les solides usuels la loi de Hooke (linéaire) s'étend jusqu'à la limite élastique. Un phénomène dynamique comme la propagation d'une onde a pour effet d'élever

(1) Version réduite d'un travail présenté comme Thèse de Doctorat à la Sorbonne le 10 décembre 1959.

dans des proportions parfois notables cette limite élastique et il devient possible que dans le front de l'onde des effets élastiques non linéaires se superposent aux effets de dissipation⁽¹⁾. Dès lors on peut s'attendre dans certains cas à des profils d'ondes de raréfaction stables. Dans le présent mémoire nous nous contentons de montrer qu'ils sont une conséquence de la relation tension-déformation que nous adoptons pour caractériser l'onde. Mais la stabilité de ces profils peut être démontrée thermodynamiquement⁽²⁾.

La seconde partie de ce travail a un caractère plus expérimental. Un premier chapitre donne quelques indications sur la production des hautes pressions dynamiques, un second chapitre passe en revue quelques-unes des méthodes de mesure des phénomènes transitoires liés à ces pressions et un troisième chapitre présente quelques résultats de mesure. Le texte date de plus de deux ans et les règles qui s'appliquent à l'impression des thèses de doctorat ne nous ont pas permis d'y incorporer les méthodes et les résultats nouveaux obtenus depuis décembre 1959.

⁽¹⁾ Précisons que, dès qu'on sort du domaine des petites déformations, le concept de non linéarité n'a de signification précise qu'une fois qu'on a défini la grandeur qui mesure la déformation.

⁽²⁾ Jean KIEFFER, *Sur les ondes des solides susceptibles de grandes déformations élastiques*. Colloques internationaux du C.N.R.S. « Les ondes de détonation », Paris, 1961.

SOMMAIRE

<i>Introduction</i>	10
PREMIÈRE PARTIE	
THÉORIE	
Chapitre premier. Géométrie et cinématique du milieu continu	15
Chapitre II. Dynamique du milieu continu.....	23
Chapitre III. Équation caractéristique et ondes permanentes.	36
DEUXIÈME PARTIE	
MÉTHODES EXPÉRIMENTALES ET RÉSULTATS	
Chapitre premier. Obtention expérimentale des ondes de choc.....	77
Chapitre II. Les méthodes d'observation des ondes de choc.....	87
Chapitre III. Résultats expérimentaux	99
<i>Bibliographie</i>	107

INTRODUCTION

La science des ondes de choc a pris naissance avec un mémoire de RIEMANN (H 44), datant de 1860 et montrant que les équations du mouvement des fluides parfaits admettent des solutions discontinues. Une dizaine d'années plus tard, Ernst MACH (H 62), réussit à photographier l'onde de choc qui accompagne le mouvement d'un projectile dans l'air, cependant qu'en Grande-Bretagne, EARNSHAW (H 45, H 46), et RANKINE (H 56) ébauchèrent une théorie dont HUGONOT (H 72), dans son beau mémoire de 1885, donna un premier exposé synthétique.

Parallèlement le développement et l'emploi de plus en plus étendu des explosifs attira l'attention des savants sur la parenté qui existe entre l'onde de détonation et l'onde de choc dans un milieu inerte. Comme il n'est pas possible de citer ici tous les noms engagés dans ces recherches expérimentales et théoriques, je me contente de rappeler ceux de DIXON (H 81), SCHUSTER (H 82), CHAPMAN (H 88), BERTHELOT (H 63, H 67, H 68, H 69), VIEILLE (H 90, H 91, H 92, H 93), MALLARD (H 64) et LE CHATELIER (H 94, H 95). Au début de ce siècle, DUHEM (H 101) et JOUGUET (H 96) précisent dans une série de *Comptes rendus* un certain nombre de propriétés des ondes de choc inertes, tandis que JOUGUET toujours, dans un autre ensemble de *Comptes rendus* (H 96) et dans deux articles plus importants du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (H 97), jette les bases de la théorie hydrothermodynamique des ondes de détonation.

Un troisième domaine de recherches enfin est apparu : dès 1872, HOPKINSON (H 59, H 60) a étudié les ondes de déformation intenses qui se propagent dans les solides soumis à des sollicitations brutales.

Ainsi se trouvent réunies au début de ce siècle les conditions qui permettront de résoudre les problèmes généraux de « la propagation du mouvement dans les systèmes de molécules » qu'avaient clairement posés, et en partie résolus, au cours du XIX^e siècle, les esprits puissamment synthétiques de POISSON (H 3, H 4, H 6, H 10, H 17 à 20, H 28), CAUCHY (H 5, H 11 à 12, H 14 à 16, H 21 à 26, H 29 à 34, H 36), NAVIER (H 7, H 8, H 9, H 13) et, dans le cas plus restreint du seul mouvement des gaz, AIRY (H 39), STOKES (H 38), et CHALLIS (H 37).

Le cas particulier de la « propagation des mouvements de choc » prend une importance croissante et marque des progrès rapides. En 1911, Lord RAYLEIGH (H 112), en fait, pour les gaz, une mise au point remarquable. En 1917, la *Mécanique des Explosifs*, de M. JOUGUET (L 6) expose les principes de la détonation, pressentis dès 1905, et qui, pour l'essentiel, sont demeurés tels quels jusqu'à ce jour. En 1922, BECKER (H 125) explique définitivement le paradoxe de l'épaisseur nulle des ondes de choc dans les fluides en montrant qu'elle est

essentiellement liée à l'hypothèse d'absence de dissipation. Quant à l'étude théorique des ondes dans les solides, malgré quelques beaux travaux comme celui de DONNELL (H 143) en 1930, elle est quelque peu délaissée jusqu'à la seconde guerre mondiale au cours de laquelle VON KARMAN et DUWEZ (A 48), TAYLOR, CLARK et WOOD (A 14), RAKHMATULIN, WHITE et VON GRIFFIS (A 125), enfin, mettent au point leur théorie des ondes plastiques (ondes de moyenne intensité qui s'étalent en cours de propagation). Et c'est après la guerre que la théorie des ondes de choc proprement dites dans les solides prend un essor remarquable sous l'impulsion des recherches expérimentales de PACK, EVANS, JAMES (A 75) en Grande-Bretagne, de SCHALL (A 96), SCHARDIN (A 97) au Laboratoire de Saint-Louis et d'un grand nombre de chercheurs américains, groupés pour l'essentiel aux Centres de Recherches de Los Alamos et de Stanford, (A 2, A 38, A 60, A 67, A 103, A 121). Pour interpréter leurs résultats, ces physiciens font l'hypothèse du comportement essentiellement fluide du solide au passage de l'onde de choc et adoptent par conséquent les équations de RANKINE-HUGONIOU telles que ces auteurs les ont données pour les fluides.

Quant aux gaz, les recherches s'engagent dans deux voies bien définies. D'une part, les idées en germe dans les anciennes publications sur l'explication thermodynamique des ondes de choc, sont développées par des mathématiciens comme BETHE (A 8), WEYL (A 123), VON NEUMANN (A 139) entre autres et leurs ultimes conséquences sont mises en évidence. Ces auteurs montrent en particulier comment l'hypothèse d'une discontinuité mathématique pour l'onde de choc, loin d'être une gêne, peut au contraire être un puissant facteur de simplification dans la résolution d'un grand nombre de problèmes d'écoulement des fluides avec conditions aux limites compliquées (problème de réflexion et de réfraction des ondes de choc). D'autres chercheurs s'intéressent au contraire à l'étude de l'épaisseur de la zone de transition dans laquelle le gaz passe de son état initial à son état final. C'est ainsi, qu'en 1947, L. H. THOMAS (H 114) montre, qu'en tenant compte de la variation avec la température des coefficients de viscosité et de conductivité thermique, on peut ramener à des quantités raisonnables les épaisseurs trop faibles calculées par BECKER. D'autres encore (A 130, A 131, A 138) reprenant une autre idée de BECKER, tentent de déterminer la structure de l'onde de choc à partir de la théorie cinétique des gaz non-uniformes telle qu'elle est développée dans l'ouvrage classique de CHAPMAN-COWLING.

Le présent mémoire s'intéresse aux milieux denses. Il est composé d'une partie théorique et d'une partie expérimentale qui comprennent chacune trois chapitres.

Partie théorique

Le but est de mettre en évidence les étapes successives du calcul conduisant à la détermination de la structure et de l'épaisseur d'une onde de choc dans un milieu continu quelconque. La condition préalable indispensable à la résolution de ce calcul est la donnée d'une équation d'état du milieu. Or l'équation d'état des solides fait intervenir inévitablement leur déformation.

Le premier chapitre donne donc un rappel des notions essentielles qui interviennent dans la déformation d'un milieu continu. Le problème des

déformations finies est déjà ancien, mais il a connu ces temps derniers un regain d'intérêt lorsqu'on a reconnu les avantages que présente pour l'écriture exacte de l'équation d'état une connaissance précise de la nature tensorielle des diverses grandeurs géométriques impliquées dans la définition de la déformation. Je rappelle les deux descriptions classiques, eulérienne et lagrangienne, d'une portion de matière qui se déforme, j'établis le lien qui existe entre elles et j'introduis les deux définitions correspondantes de la déformation en précisant leur nature tensorielle.

La suite du chapitre est consacrée pour l'essentiel à l'étude des invariants de la déformation ainsi que de sa vitesse, grandeurs qui seront utilisées au troisième chapitre pour écrire l'équation d'état des différents solides.

Le deuxième chapitre commence par préciser la nature tensorielle du tableau représentatif des tensions, communément appelé tenseur des tensions. Me plaçant ensuite en repère orthonormé, j'écris les cinq équations fondamentales de la dynamique des milieux continus et j'adapte ces équations au cas particulier des « mouvements par tranches planes » tels qu'on les rencontre en particulier dans l'étude des ondes de choc planes. On sait que ces équations s'intègrent dans le cas des mouvements permanents. Cette intégration se fait habituellement à partir des équations du mouvement des fluides et conduit aux intégrales premières connues sous le nom de relations de RANKINE-HUGONOT. Je montre qu'elle est encore possible dans le cas des solides, ayant un tenseur des tensions et un tenseur de déformation, et qu'elle conduit alors à ce que j'ai appelé les *relations d'Hugoniot généralisées* qui tiennent compte des glissements latéraux pouvant apparaître au passage de l'onde. Les relations d'HUGONOT généralisées peuvent aussi être retrouvées à partir des équations du mouvement par tranches planes quelconque (accélééré), si l'on fait l'hypothèse d'une discontinuité qui se propage dans la substance et si l'on adapte les équations du mouvement à cette discontinuité. On peut donc conclure que les relations d'HUGONOT s'appliquent d'une part aux ondes planes de structure quelconque et de mouvement permanent, et d'autre part aux ondes planes d'épaisseur nulle et de mouvement quelconque. Cette remarque montre que, chaque fois que les relations d'HUGONOT donnent des résultats conformes à l'expérience, la raison peut en être cherchée soit dans le mouvement quasi uniforme de l'onde, soit dans son épaisseur quasi nulle (soit, bien entendu, dans ces deux propriétés simultanément réalisées).

Le troisième chapitre étudie la structure des ondes permanentes en fonction de la nature du milieu. Je rappelle pour commencer le calcul classique qui met en évidence les circonstances dans lesquelles des discontinuités doivent apparaître dans les substances non-dissipatives, et je donne une description de l'évolution d'une onde continue.

Je passe ensuite à l'intégration des relations d'HUGONOT pour les substances dissipatives. Pour les gaz, et les liquides obéissant à une équation d'état de VAN DER WAALS simplifiée, les calculs sont connus depuis les travaux de BECKER.

Je les étends à diverses substances visco-élastiques et plastiques (en négligeant les effets de température). Il est tenu compte des déformations finies,

ce qui a pour conséquence de faire perdre aux équations caractéristiques de ces substances leur caractère d'équations différentielles linéaires. Les calculs sont entièrement développés pour les substances visco-élastiques suivantes : modèle de KELVIN-VOIGT avec loi élastique linéaire et quadratique; modèle de MAXWELL. Dans le premier cas, l'existence des ondes permanentes est établie; dans le second cas, au contraire, il faut conclure à leur impossibilité. L'épaisseur de ces ondes, lorsqu'elles existent, est directement liée à l'importance mutuelle des coefficients de viscosité et des constantes élastiques. Je donne, pour la loi élastique linéaire, un tableau de valeurs numériques étendu sur un certain domaine de valeurs de coefficients. Pour la loi élastique quadratique ce calcul n'a pu être fait par suite de l'ignorance complète où l'on est sur la valeur des constantes élastiques du second degré.

Des difficultés particulières apparaissent dans l'étude des corps plastiques. Ces difficultés sont liées à l'incompressibilité de la phase plastique. D'une part, en effet, cette propriété interdit d'exprimer les tensions en fonction des déformations (ou de leurs vitesses) ainsi qu'il est montré dans le texte. La loi de composition de KELVIN-VOIGT ne peut donc pas s'appliquer. D'autre part, une déformation par tranches planes ne peut se propager dans une phase plastique, puisqu'une telle déformation entraîne forcément une variation de volume qui est incompatible avec l'incompressibilité. La déformation par tranches planes ne peut donc s'appliquer qu'au mélange des phases élastique et plastique, les dimensions latérales étant conservées par compensation mutuelle entre les déformations radiales partielles élastique et plastique. Les équations du mouvement sont écrites dans cette hypothèse et il est montré que, si l'on adopte les définitions habituelles de la plasticité (H 57, H 58, H 118, H 126, H 134, H 135, H 138, H 142, A 21, A 40, A 82, L 17, L 20 et autres) [plasticité parfaite ou à écrouissage] qui ignorent la viscosité, les ondes permanentes d'épaisseur non nulle sont impossibles. Pour aboutir à de telles ondes, il faut généraliser la définition habituelle de la plasticité. Le présent mémoire se contente de donner quelques indications à ce sujet.

En conclusion, le chapitre final de cette première partie théorique étend des résultats connus pour les fluides aux solides visco-élastiques et amorce une nouvelle extension de ces résultats aux solides plastiques, qui devra être poursuivie à partir d'une définition plus générale de la plasticité.

Partie expérimentale

Le premier chapitre étudie les phénomènes qui ont lieu dans les milieux continus à la suite de l'apparition d'une discontinuité. Les diverses possibilités sont complètement énumérées et décrites. Ces résultats sont appliqués au cas particulier d'un explosif qui détone au contact d'un milieu inerte et au choc d'un projectile sur un tel milieu.

Dans le cas d'un explosif, l'influence de la nature de celui-ci et de celle du milieu sur la célérité de l'onde de choc induite dans le milieu est discutée en détail. Il apparaît à la suite de cette discussion que l'existence d'ondes de choc de vitesse supérieure à la vitesse de détonation, signalée par M. LAFFITTE dès

1925, (H 127) est conforme à la théorie, tandis que dans les milieux denses, cette théorie fait prévoir au contraire, sauf exception, des ondes de choc de vitesse inférieure à la vitesse de détonation.

Le second chapitre passe rapidement en revue les diverses méthodes d'observation des ondes de choc qui ont été employées.

Le dernier chapitre présente les résultats expérimentaux que nous avons obtenus. Ces résultats ont trait aux liquides et aux solides. Les adiabatiques dynamiques expérimentales sont données. Une comparaison de l'adiabatique de l'eau avec les courbes isothermes données par BRIDGMAN montre que la possibilité de solidification de l'eau ne peut être rejetée mais qu'elle ne saurait intéresser, en tout état de cause, que des quantités très réduites de liquide. Cette comparaison permet en outre de se faire une idée grossière de l'élévation de température dans l'onde de choc. Pour l'argon on a essayé de faire un calcul direct de l'échauffement à partir d'une équation d'état basée sur un potentiel LENNARD-JONES (6-12), donnée par WENTORFF et coll. Pour les solides, on donne la courbe de compressibilité du plexiglass. Cette dernière a été obtenue par onde de choc plane et par onde de choc oblique. La transparence du plexiglass permet en outre d'observer très nettement divers phénomènes de fracture, consécutifs au passage de l'onde de choc, qui ont déjà été signalés par RINEHART (89) et KOLSKY (L 23).

La bibliographie est subdivisée en trois parties, consacrées respectivement aux livres (L), aux publications d'avant 1930 (H groupées chronologiquement) et aux publications d'après 1930 (A citées dans l'ordre alphabétique). J'aurais arrêté la bibliographie chronologique au mémoire fondamental de BECKER, qui date de 1922, si je n'avais pas tenu à citer un certain nombre de publications importantes pour le développement de la théorie de la plasticité, parues entre 1922 et 1930, et qu'il me paraissait plus logique de faire figurer dans la rubrique « Histoire » en raison de leur caractère fondamental. Cette bibliographie est loin d'être complète. C'est à dessein que j'en ai réduit la partie historique. Les lacunes qu'on relèvera dans la liste des publications récentes doivent par contre être attribuées à des oublis inévitables.

J'adresse, pour terminer, mes remerciements à M. VODAR, Directeur du Laboratoire des Hautes Pressions du Centre National de la Recherche Scientifique où je travaille, ainsi qu'à M. MANSON, professeur à l'École de Mécanique appliquée de Poitiers, pour l'aide et les conseils qu'ils m'ont prodigués au cours de ce travail. Les expériences ont été réalisées en collaboration avec M. Jean DAPOIGNY et ont été, en partie, conçues par lui. Je tiens à le remercier tout particulièrement pour l'appui que j'ai toujours trouvé auprès de lui. Que M. Raymond EPAIN veuille également trouver ici l'expression de ma gratitude pour les nombreuses conversations que nous avons eues au cours de ce travail.

Le présent article est la version sensiblement abrégée d'un mémoire présenté à la Faculté des Sciences de Paris comme thèse de doctorat. Les coupures les plus importantes ont affecté les premier et troisième chapitres de la première partie, ainsi que le second chapitre de la deuxième partie. Un appendice, traitant du calcul tensoriel et matriciel, a été complètement supprimé.

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE

CHAPITRE PREMIER

GÉOMÉTRIE ET CINÉMATIQUE DU MILIEU CONTINU

L'espace sera doué d'une métrique classique. Il sera occupé, en entier ou en partie, par une substance continue, compressible et déformable. Les autres propriétés de cette substance ne seront pour l'instant pas précisées davantage.

Le problème sera d'isoler par la pensée un volume macroscopique de substance et d'en suivre, au cours du temps, les changements de forme extérieure et de structure interne (déformation locale). L'étude des forces extérieures — de surface et de volume — nécessaires à ces transformations, ainsi que celle des tensions intérieures qui en résultent, sera abordée ultérieurement.

Le volume de substance ainsi isolé, que j'appellerai le système physique ou le corps, sera décomposé par la pensée en autant de fragments qu'il est nécessaire, et l'état géométrique et cinématique du corps sera complètement déterminé, à un instant donné, par la connaissance de la position, ainsi que de l'état de mouvement et de déformation, de tous les fragments. Ceux-ci seront supposés de dimensions assez faibles pour qu'ils soit permis de leur attribuer une structure uniforme, assez grandes cependant pour que, nonobstant la structure atomique du corps, la notion de continuité conserve sa signification à l'intérieur de chaque fragment. La structure interne (déformation locale) variera continûment d'un fragment à l'autre, et ceux-ci se déplaceront et se déformeront de manière que la cohésion de la substance soit préservée. Du moins en sera-t-il ainsi aussi longtemps que les phénomènes de cavitation et de fracture seront exclus.

1. Un vecteur élémentaire de l'espace physique P , issu du point M , est complètement défini par ses composantes contravariantes ($d\kappa^1, d\kappa^2, d\kappa^3$)

sur le repère naturel au point M. Sa norme (carré de sa longueur) est donnée par l'expression

$$(I-1-1) \quad \left| \overrightarrow{dM} \right|^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

qui peut prendre les formes symboliques suivantes

$$(I-1-2) \quad \left| \overrightarrow{dM} \right|^2 = \overline{dM} \underline{\underline{g}} \overline{dM}^\times = \overline{dM} \underline{\underline{dM}}.$$

Un vecteur élémentaire de l'espace paramétrique $\mathcal{Q}^{(1)}$, issu du point L, est complètement défini par ses composantes contravariantes (dp^1, dp^2, dp^3) sur le repère naturel au point L. Sa norme (carré de sa longueur) est donnée par l'expression

$$(I-1-3) \quad \left| \overrightarrow{dL} \right|^2 = \gamma_{\alpha\beta} dp^\alpha dp^\beta$$

qui peut prendre les formes symboliques suivantes :

$$(I-1-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \overrightarrow{dL} \right|^2 = dL \underline{\underline{\gamma}} dL^\times \\ \phantom{\left| \overrightarrow{dL} \right|^2} = dL \underline{\underline{dL}}. \end{array} \right.$$

Comme il existe une relation biunivoque entre les espaces P et $\overline{\mathcal{Q}}$, je puis considérer que le point M est associé au point L, et que le vecteur $\overrightarrow{dM}$ est associé au vecteur $\overrightarrow{dL}$. Il est facile de préciser ce lien. Introduisant les deux matrices inverses l'une de l'autre (L 19, A 70)

$$(I-1-5) \quad {}_P^- = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial p^1} & \frac{\partial x^2}{\partial p^1} & \frac{\partial x^3}{\partial p^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial p^2} & \frac{\partial x^2}{\partial p^2} & \frac{\partial x^3}{\partial p^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial p^3} & \frac{\partial x^2}{\partial p^3} & \frac{\partial x^3}{\partial p^3} \end{pmatrix}$$

et

$$(I-1-6) \quad {}_Q^- = \begin{pmatrix} \frac{\partial p^1}{\partial x^1} & \frac{\partial p^2}{\partial x^1} & \frac{\partial p^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial p^1}{\partial x^2} & \frac{\partial p^2}{\partial x^2} & \frac{\partial p^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial p^1}{\partial x^3} & \frac{\partial p^2}{\partial x^3} & \frac{\partial p^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}$$

il vient,

$$(I-1-7) \quad \overline{dM} = d\overline{L} {}_P^-$$

$$(I-1-8) \quad d\overline{L} = \overline{dM} {}_Q^-$$

(1) Espace des paramètres p^α qui différencient les éléments matériels (souvent les p^α sont les positions initiales).

ou, utilisant la notation indicielle :

$$(I-1-9) \quad dx^i = P_{\alpha}^i dp^{\alpha}$$

$$(I-1-10) \quad dp^{\alpha} = Q_{\alpha}^i dx^i.$$

Dans ces relations, on peut prendre indifféremment comme variables indépendantes, les paramètres p^{α} et t , ou les coordonnées x^i et t . Mais, *quel que soit le choix adopté*, ces expressions établissent une relation entre deux vecteurs qui appartiennent à des espaces différents. Moyennant (I-1-7) et (I-1-8) les normes des vecteurs $\overrightarrow{dM}$ et $\overrightarrow{dL}$, données par (I-1-2) et (I-1-4), peuvent s'écrire :

$$(I-1-11) \quad |\overrightarrow{dM}|^2 = \overline{dM} \underset{=}{g} \overline{dM}^{\times} = \overline{dL} \underset{=}{P} \underset{=}{g} \underset{=}{P}^{\times} \overline{dL}^{\times}$$

$$(I-1-12) \quad |\overrightarrow{dL}|^2 = \overline{dL} \underset{=}{\gamma} \overline{dL}^{\times} = \overline{dM} \underset{=}{Q} \underset{=}{\gamma} \underset{=}{Q}^{\times} \overline{dM}^{\times}$$

ou, en notation indicielle :

$$(I-1-13) \quad |\overrightarrow{dM}|^2 = p_{\alpha}^i p_{\beta}^{\times j} g_{ij} dp^{\alpha} dp^{\beta}$$

$$(I-1-14) \quad |\overrightarrow{dL}|^2 = Q_i^{\alpha} Q_j^{\times \beta} \gamma_{\alpha\beta} dx^i dx^j.$$

Nous avons ainsi exprimé la norme d'un vecteur élémentaire de l'espace physique, en fonction des composantes du vecteur associé dans l'espace paramétrique et réciproquement.

2. Avant de donner une définition quantitative de la *déformation*, il faut savoir ce qu'on entend par l'état *non-déformé* d'un élément de substance : le paramètre qui mesure la déformation doit être nul et le plus logique est d'assimiler cet état à l'état de la substance en l'absence totale de forces extérieures. (Dans la pratique l'état non-déformé, dit état naturel, est associé aux conditions de pression et de température ambiantes de l'atmosphère terrestre).

Soit alors un segment de substance de longueur $|\overrightarrow{dM_0}|$ dans l'état non-déformé. Si au cours du temps, la longueur de ce segment vient à être $|\overrightarrow{dM}|$ la variation de longueur subie à l'instant t est

$$(I-2-1) \quad |\overrightarrow{dM}| - |\overrightarrow{dM_0}|.$$

Il y a cependant avantage de rattacher ce qu'on appellera la déformation à la différence des carrés : (L 19, H 34, A 30, A 70)

$$(I-2-2) \quad |\overrightarrow{dM}|^2 - |\overrightarrow{dM_0}|^2.$$

Cette différence peut être exprimée de deux manières fort différentes selon que j'adopte le point de vue de Lagrange ou, au contraire, celui d'Euler, et conduit à deux définitions différentes de la déformation.

a. POINT DE VUE DE LAGRANGE. — Je définis un segment de substance par son vecteur $\overrightarrow{dL}$, issu du point L de l'espace paramétrique, et je suppose qu'à l'instant t_0 la matière autour du point L se soit trouvée dans l'état naturel.

A l'instant t_0 le segment $\overrightarrow{dL}$ occupe dans l'espace physique le segment $\overrightarrow{dM_0} = \overline{dL} \cdot \underline{P_0^-}$, de norme $|\overrightarrow{dM_0}|^2 = \overline{dL} \cdot \underline{P_0^-} \underline{g} \cdot \underline{P_0^-}^\times \overline{dL}^\times$.

A l'instant t , il occupe dans l'espace physique le segment $\overrightarrow{dM} = \overline{dL} \cdot \underline{P^-}$, de norme $|\overrightarrow{dM}|^2 = \overline{dL} \cdot \underline{P^-} \underline{g} \cdot \underline{P^-}^\times \overline{dL}^\times$.

D'où la différence

$$(I-2-3) \quad |\overrightarrow{dM}|^2 - |\overrightarrow{dM_0}|^2 = \overline{dL} \cdot [\underline{P^-} \underline{g} \cdot \underline{P^-}^\times - \underline{P_0^-} \underline{g} \cdot \underline{P_0^-}^\times] \overline{dL}^\times.$$

J'appelle DÉFORMATION la grandeur

$$(I-2-4) \quad \underline{\eta} = \frac{1}{2} [\underline{P^-} \underline{g} \cdot \underline{P^-}^\times - \underline{P_0^-} \underline{g} \cdot \underline{P_0^-}^\times]$$

et j'ai

$$(I-2-5) \quad |\overrightarrow{dM}|^2 - |\overrightarrow{dM_0}|^2 = 2 \overline{dL} \cdot \underline{\eta} \overline{dL}^\times.$$

Sur cette dernière expression on peut voir que la déformation $\underline{\eta}$ est un tenseur de rang deux de l'espace paramétrique. Il intervient dans (I-2-5) en représentation deux fois covariante, donnée par (I-2-4).

b. POINT DE VUE D'EULER. — Je considère un segment $\overline{dM}$ fixe de l'espace physique, issu du point M.

A l'instant t ce segment est occupé par les particules matérielles qui sont définies dans l'espace paramétrique par le segment $dL = \overline{dM} \cdot \underline{Q^-}$.

A l'instant t_0 ces particules occupaient dans l'espace physique la position $\overrightarrow{dM_0} = \overline{dL} \cdot \underline{P_0^-} = \overline{dM} \cdot \underline{Q^-} \cdot \underline{P_0^-}$ et je suppose qu'à ce moment ces particules se trouvaient dans leur état non-déformé.

Calculant alors la différence des carrés, il vient :

$$(I-2-6) \quad |\overrightarrow{dM}|^2 - |\overrightarrow{dM_0}|^2 = \overline{dM} \cdot \left[\underline{g} - \underline{Q^-} \cdot \underline{P_0^-} \underline{g} \cdot \underline{P_0^-}^\times - \underline{Q^-}^\times \right] \overline{dM}^\times.$$

J'appelle DÉFORMATION la grandeur

$$(I-2-7) \quad \underline{\mu} = \frac{1}{2} \left[\underline{g} - \underline{Q^-} \cdot \underline{P_0^-} \underline{g} \cdot \underline{P_0^-}^\times - \underline{Q^-}^\times \right]$$

et j'ai

$$(I-2-8) \quad |\overrightarrow{dM}|^2 - |\overrightarrow{dM_0}|^2 = 2 \overline{dM} \cdot \underline{\mu} \overline{dM}^\times.$$

Cette dernière expression montre que la déformation $\underline{\mu}$ est un tenseur de rang deux de l'espace physique. Il intervient dans (I-2-8) en représentation deux fois covariante, donnée par (I-2-7).

Dans la suite j'appellerai $\underline{\eta}$ la *déformation lagrangienne*, et $\underline{\mu}$ la *déformation eulérienne* afin d'éviter toute confusion possible. Leur signification physique est fort différente : alors que $\underline{\eta}$ mesure la déformation subie au cours du temps par un élément de substance donné, $\underline{\mu}$ mesure les états de déformation réalisés au cours du temps sur les différents éléments de substance qui passent en un segment fixe de l'espace physique.

Il existe néanmoins, une relation entre $\underline{\eta}$ et $\underline{\mu}$,

On a :

$$(1-2-9) \quad \underline{\eta} = \underline{P}^{-1} \underline{\mu} \underline{P}^{\times}$$

et

$$(1-2-10) \quad \underline{\mu} = \underline{Q}^{-1} \underline{\eta} \underline{Q}^{\times}.$$

En définitive on a :

TABLEAU I

Description lagrangienne
$x^i = x^i(p^{\alpha}, t) \quad \text{ou} \quad M = M(L, t)$ $\underline{dM} = \underline{dL} \underline{P}^{-1}$ $ \underline{dM} ^2 = \underline{dL} \underline{P}^{-1} \underline{g}^{-1} \underline{P}^{\times} \underline{dL}^{\times}$ $\underline{\eta} = \frac{1}{2} \left[\underline{P}^{-1} \underline{g}^{-1} \underline{P}^{\times} - \underline{P}_0^{-1} \underline{g}^{-1} \underline{P}_0^{\times} \right]$ $ \underline{dM} ^2 - \underline{dM}_0 ^2 = 2 \underline{dL} \underline{\eta} \underline{dL}^{\times}$

Description eulérienne
$p^{\alpha} = p^{\alpha}(x^i, t) \quad \text{ou} \quad L = L(M, t)$ $\underline{dL} = \underline{dM} \underline{Q}^{-1}$ $ \underline{dL} ^2 = \underline{dM} \underline{Q}^{-1} \underline{\gamma}^{-1} \underline{Q}^{\times} \underline{dM}^{\times}$ $\underline{\mu} = \frac{1}{2} \left[\underline{g} - \underline{Q}^{-1} \underline{P}_0 \underline{g}^{-1} \underline{P}_0^{\times} - \underline{Q}^{\times} \right]$ $ \underline{dM} ^2 - \underline{dM}_0 ^2 = 2 \underline{dM} \underline{\mu} \underline{dM}^{\times}$

On simplifiera le plus souvent ces expressions en identifiant les paramètres p^2 avec les coordonnées dans l'espace physique à un instant convenablement choisi t_0 et en utilisant des repères orthonormés (cartésiens). Les tenseurs $\underline{\eta}$ et $\underline{\mu}$ s'écrivent alors :

$$(I-2-11) \quad \underline{\eta} = \frac{1}{2} (PP^\times - E_3)$$

$$(I-2-12) \quad \underline{\mu} = \frac{1}{2} (E_3 - QQ^\times)$$

3. Au tenseur de déformation s'attachent un certain nombre d'invariants qu'il est facile de trouver par application de l'opération de contraction tensorielle. Cette opération ne peut s'appliquer qu'à une représentation mixte du tenseur. Pour le tenseur de déformation lagrangienne, la représentation mixte s'écrit :

$$(I-3-1) \quad \eta_i^k = g^{kj} \eta_{ij}.$$

D'où je tire :

l'invariant linéaire :

$$(I-3-2) \quad I_1 = \eta_i^i = \eta_1^1 + \eta_2^2 + \eta_3^3$$

les deux invariants d'ordre deux, linéairement indépendants :

$$(I-3-3) \quad I'_2 = \eta_i^j \eta_j^i = (\eta_1^1)^2 + (\eta_2^2)^2 + (\eta_3^3)^2 + 2 [(\eta_1^2)^2 + (\eta_1^3)^2 + (\eta_2^3)^2].$$

$$(I-3-4) \quad I''_2 = \eta_i^i \eta_j^j = (\eta_1^1)^2 + (\eta_2^2)^2 + (\eta_3^3)^2 + 2 (\eta_1^1 \eta_2^2 + \eta_1^1 \eta_3^3 + \eta_2^2 \eta_3^3)$$

et toutes leurs combinaisons linéaires. En pratique, le plus important des invariants d'ordre 3 est

$$(I-3-5) \quad I_3 = \det. \underline{\eta}.$$

Un autre invariant d'ordre 3, souvent utilisé est le suivant :

$$(I-3-6) \quad \begin{cases} I_3 = \frac{1}{3} \eta_i^j \eta_j^k \eta_k^i \\ = \frac{1}{3} [(\eta_1^1)^3 + (\eta_2^2)^3 + (\eta_3^3)^3] + \eta_1^1 [(\eta_1^2)^2 + (\eta_1^3)^2] + \eta_2^2 [(\eta_1^2)^2 + (\eta_2^3)^2] + \eta_3^3 [(\eta_1^3)^2 + (\eta_2^3)^2] + 2\eta_1^2 \eta_2^3 \eta_3^1. \end{cases}$$

Une combinaison linéaire des deux invariants d'ordre deux qu'on utilise fréquemment est la suivante :

$$(I-3-7) \quad I_2 = \frac{1}{2} [I'_2 - I''_2] = (\eta_1^1)^2 + (\eta_2^2)^2 + (\eta_3^3)^2 - (\eta_1^1 \eta_2^2 + \eta_1^1 \eta_3^3 + \eta_2^2 \eta_3^3).$$

Nous nous limiterons à ces six invariants. Dans le repère des directions principales, le tenseur de déformation η en représentation deux fois covariante est donné par une matrice diagonale, puisque P y est diagonal et que le repère est orthonormé (donc $g = E_3$). Il en est donc encore ainsi de la représentation mixte η^- et les différents invariants peuvent s'écrire dans ce repère :

$$(I-3-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \eta^1 + \eta^2 + \eta^3 \\ I_2 = (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 \quad \left(\text{on utilise plutôt } \frac{1}{2} I_2 \right) \\ I_2' = (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 + 2(\eta^1 \eta^2 + \eta^1 \eta^3 + \eta^2 \eta^3) \\ I_2 = -(\eta^1 \eta^2 + \eta^1 \eta^3 + \eta^2 \eta^3) \\ I_3 = \eta^1 \eta^2 \eta^3 \\ I_3 = \frac{1}{3} [(\eta^1)^3 + (\eta^2)^3 + (\eta^3)^3]. \end{array} \right.$$

D'autres expressions, utiles pour la suite, introduisent les *vitesse de déformation*. Je considère à un instant t le champ des vitesses particulières repéré à l'aide des variables eulériennes :

$$(I-3-9) \quad u^i = u^i(x^j, t).$$

Soit alors le tableau suivant :

$$(I-3-10) \quad D = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^1} \right] & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u^1}{\partial x^3} + \frac{\partial u^3}{\partial x^1} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \right] & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u^2}{\partial x^3} + \frac{\partial u^3}{\partial x^2} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u^3}{\partial x^1} + \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \right] & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u^3}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \right] & \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{array} \right\}$$

En désignant par $\frac{\Delta}{\Delta t}$ la dérivée lagrangienne par rapport au temps, on peut vérifier qu'on a la relation :

$$(I-3-11) \quad \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} \left(\frac{\partial M}{\partial M_0} \right) = \frac{\partial}{\partial M_0} \frac{\Delta M}{\Delta t}.$$

Considérant par ailleurs

$$(I-3-12) \quad \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\Delta M}{\Delta t} \right) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Delta y}{\Delta t} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\Delta x}{\Delta t} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\Delta x}{\Delta t} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{\Delta y}{\Delta t} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{array} \right\}.$$

nous pouvons vérifier la relation

$$(I-3-13) \quad \frac{\Delta P}{\Delta t} = P \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\Delta M}{\Delta t} \right)$$

d'où

$$(I-3-14) \quad \left(\frac{\Delta P}{\Delta t} \right)^{\times} = \frac{\Delta}{\Delta t} (P^{\times}) = \left[\frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\Delta M}{\Delta t} \right) \right]^{\times} P^{\times}.$$

Introduisons alors la matrice déjà utilisée :

$$k = PP^{\times}$$

et calculons

$$(I-3-15) \quad \frac{\Delta k}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{\Delta t} P^{\times} + P \frac{\Delta}{\Delta t} P^{\times}$$

d'où en utilisant (I-3-13) et (I-3-14) :

$$(I-3-16) \quad \begin{cases} \frac{\Delta k}{\Delta t} = P \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\Delta M}{\Delta t} \right) P^{\times} + P \left[\frac{\partial M}{\partial M} \left(\frac{\Delta M}{\Delta t} \right) \right]^{\times} P^{\times} \\ = P \left[\frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\Delta M}{\Delta t} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\Delta M}{\Delta t} \right) \right)^{\times} \right] P^{\times}. \end{cases}$$

Maintenant la matrice qui figure entre parenthèse n'est autre que $2 D$ (voir I-3-10). Nous avons d'autre part

$$k = 2\eta + E_3$$

d'où

$$\frac{\Delta k}{\Delta t} = 2 \frac{\Delta \eta}{\Delta t}.$$

En fin de compte nous obtenons donc la relation très importante (L 19)

$$(I-3-17) \quad \frac{\Delta \eta}{\Delta t} = P D P^{\times}.$$

CHAPITRE II

DYNAMIQUE DU MILIEU CONTINU

(TENSEUR DES TENSIONS)

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

RELATIONS D'HUGONOT GÉNÉRALISÉES

1. La notion de *tenseur des tensions* s'introduit de manière naturelle lorsqu'on considère une portion de substance comprise dans un volume $V(t)$ qui varie sous l'effet de forces massiques et superficielles. En exprimant la condition d'équilibre pour les forces appliquées, il vient :

$$(II-1-1) \quad \int_{V(t)} \rho \vec{F} dV + \int_{S(t)} \vec{\sigma}_n dS = 0.$$

Nous supposons donc que la substance se trouve à l'équilibre à l'instant considéré. Cette restriction est cependant sans importance pour les résultats que nous voulons établir, les forces d'inertie étant du type « forces massiques » et s'annulant par conséquent avec ces dernières.

En appliquant l'expression précédente à un cylindre de bases infiniment petites, perpendiculaires à la direction $\vec{n}$, et en faisant tendre les bases l'une vers l'autre, il vient :

$$(II-1-2) \quad \vec{\sigma}_{-\vec{n}} = -\vec{\sigma}_{\vec{n}}.$$

Considérons maintenant l'aire construite, sur deux vecteurs infinitésimaux : $\vec{da}(da^1, da^2, da^3)$ et $\vec{db}(db^1, db^2, db^3)$. Cette aire peut être calculée en *repère quelconque* par l'expression :

$$(II-1-3) \quad S_{\vec{da}\vec{db}} = \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j} (da_i db_j - da_j db_i) (da^i db^j - da^j db^i) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

En tenant compte de l'antisymétrie des termes impliqués dans la somme nous pouvons encore donner à cette aire l'expression :

$$(II-1-4) \quad S_{\vec{da}\vec{db}} = \left[\sum_{1,2|2,3|3,1} (da_i db_j - da_j db_i) (da^i db^j - da^j db^i) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous ne conservons ainsi dans la somme que les trois termes suivants :

$$(II-1-5) \quad \begin{cases} dS_1 = da^2 db^3 - da^3 db^2 \\ dS_2 = da^3 db^1 - da^1 db^3 \\ dS_3 = da^1 db^2 - da^2 db^1 \end{cases}$$

qui caractérisent complètement l'aire envisagée. Il suffit en effet, dans un repère donné, de les envisager comme les composantes contravariantes d'un vecteur, d'en déduire les composantes covariantes correspondantes et d'évaluer l'aire par l'expression (II-1-4). En nous plaçant en particulier en repère orthonormé, nous voyons que les trois grandeurs dS_1 , dS_2 et dS_3 donnent une mesure algébrique des projections de l'aire sur les plans de coordonnées (2,3), (3,1) et (1,2).

Comment varient ces trois grandeurs dans un changement de coordonnées quelconque de matrice A? La réponse est obtenue à partir des lois de changement connues pour le tenseur d'ordre 2 complètement antisymétrique $a^i b^j - a^j b^i$. Ses composantes varient en effet comme :

$$a^{i'} b^{j'} - a^{j'} b^{i'} = B_i^{i'} B_j^{j'} (a^i b^j - a^j b^i),$$

B étant la matrice inverse de A. Nous en déduisons pour les trois grandeurs (II-1-5) la loi :

$$(II-1-6) \quad dS_{j'} = (\det B) A_{j'}^i dS_i.$$

La surface, caractérisée par les grandeurs (II-1-5) est donc une *capacité vectorielle covariante* (L 9).

Plaçons-nous alors en repère orthonormé et considérons un tétraèdre infiniment petit qui a trois de ses faces parallèles aux plans de coordonnées, la quatrième face étant définie par (II-1-5). La condition d'équilibre des forces appliquées à ce tétraèdre s'écrit (les forces massiques étant en raison du volume infinitésimal à négliger) :

$$(II-1-7) \quad \vec{f}_s + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = 0.$$

Les grandeurs (II-1-5) peuvent être considérées comme les composantes contravariantes d'un vecteur normal à la surface oblique dS^n , dont la norme est égale au carré de l'aire de cette surface. Supposons ce vecteur dirigé vers l'extérieur du tétraèdre et orientons également vers l'extérieur du tétraèdre les normales aux faces parallèles aux plans de coordonnées. Nous pouvons introduire les tensions (forces par unité d'aire) et donner à la condition d'équilibre la forme :

$$(II-1-8) \quad \sigma_n = \frac{1}{|dS^n|} (\vec{\sigma}_1 dS_1 + \vec{\sigma}_2 dS_2 + \vec{\sigma}_3 dS_3).$$

Projetant cette expression sur les trois axes, il vient :

$$(II-1-9) \quad \sigma_n^j = \frac{1}{|dS^n|} \sigma_i^j dS_i \quad (\text{sommer sur } i).$$

En repère orthonormé la signification des coefficients des dS_i se voit facilement :

σ_i^i est la projection sur l'axe Ox^i de la tension normale exercée sur la face (j, k) du tétraèdre.

σ_j^i est la projection sur l'axe Ox^i de la tension de cisaillement exercée sur la face (i, j) du tétraèdre.

L'ensemble des neuf grandeurs figurant dans (II-1-9) forme un tableau *symétrique* (la substance ayant une polarisation magnétique nulle).

La validité de l'expression (II-1-9) doit bien entendu s'étendre à tous les repères. Or nous connaissons déjà la nature tensorielle de deux des grandeurs qui y figurent : la tension σ_{ij}^i est un vecteur pris en représentation contravariante et l'aire dS_i est une capacité vectorielle prise en représentation covariante ⁽¹⁾. La condition d'homogénéité tensorielle exige alors que le tableau représentatif de l'état de tensions

$$(II-1-10) \quad \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \sigma_1^3 \\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \sigma_2^3 \\ \sigma_3^1 & \sigma_3^2 & \sigma_3^3 \end{pmatrix}$$

soit une *densité tensorielle de rang deux* (L 9), prise en représentation contravariante, obéissant donc à la loi de transformation :

$$(II-1-11) \quad \sigma_{i'}^{j'} = (\det A) B_i^{j'} B_j^{i'} \sigma_i^j$$

à laquelle nous pouvons encore donner la forme symbolique :

$$(II-1-12) \quad \bar{\sigma}' = (\det A) B^* \bar{\sigma} B.$$

En définitive la grandeur caractéristique de l'état des tensions apparaît donc comme une *densité tensorielle d'ordre deux* (prise en représentation contravariante dans les considérations précédentes) ⁽²⁾. Si maintenant nous n'envisageons que des passages d'un repère orthonormé à l'autre, soit $A = 1$, et la loi de transformation (II-1-11) se confond avec celle d'un véritable tenseur de rang deux (représentation co- et contravariante étant alors, comme il vient d'être dit, confondues). C'est la raison pour laquelle les traités classiques parlent du *tenseur des tensions* sans plus.

Reste à préciser l'espace dans lequel nous nous plaçons. Ce sera selon les cas l'espace paramétrique et (II-1-10) donnera les *tensions lagrangiennes* ou l'espace physique et (II-1-10) donnera les tensions *eulériennes*.

(1) Le scalaire $|dS^n|$ est, bien entendu, un invariant.

(2) $\bar{\sigma}$ étant une grandeur deux fois contravariante, une écriture absolument rigoureuse devrait placer les deux indices en haut. C'est pour me conformer à la notation utilisée dans la suite, que je me suis permis cette légère infraction qui consiste à placer l'un des indices en bas. Les repères seront d'ailleurs orthonormés à partir d'ici et la position des indices en co- ou contravariance sera sans importance.

2. Je considère maintenant une portion de substance de masse constante M , comprise à l'instant t dans le volume $V(t)$ que délimite la surface $S(t)$. Le principe de conservation de la masse, et les deux principes de variation de la quantité de mouvement et de l'énergie, établissent, entre les diverses grandeurs caractéristiques de l'état de la substance et les actions extérieures, des relations qui doivent être constamment vérifiées. Le premier principe exprime l'indestructibilité de la matière, le second n'est autre que la loi fondamentale de la mécanique (loi de Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$) et le dernier s'identifie au premier principe de la thermodynamique.

Du point de vue d'Euler, qui consiste à se placer en un endroit fixe, de coordonnées x^i , de l'espace physique, les diverses grandeurs caractéristiques de l'état de la substance et de son évolution, sont des fonctions des coordonnées x^i et du temps. Parmi ces fonctions, les suivantes seront utilisées dans l'immédiat :

la densité ρ ;

la vitesse d'écoulement de la matière (vitesse particulière) $\vec{u}$;

l'énergie interne par unité de masse E ;

la force massique par unité de masse $\vec{F}$;

la tension eulérienne $\vec{\sigma}_n$;

le flux de chaleur traversant l'unité d'aire dans le sens de la normale $\vec{n} : q$.

Je rappelle que, pour un élément matériel bien défini, la densité ρ est constamment reliée à la densité initiale ρ_0 par l'expression

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\det P}$$

valable en repère orthonormé. Dans cette expression les variables indépendantes sont le temps t et les composantes initiales a^j . Il suffit de remplacer celles-ci en fonction des coordonnées eulériennes actuelles x^i , moyennant (I-1.4), pour passer à l'expression eulérienne correspondante.

Les principes de conservation prennent l'expression intégrale suivante :

$$\text{II-2-1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{u} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{F} dV + \int_{S(t)} \vec{\sigma}_n dS \\ \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left[E + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right] dV = \int_{V(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{u} dV + \int_{S(t)} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{u} dS - \int_{S(t)} q \cdot \vec{n} dS \end{array} \right.$$

La seconde de ces relations étant vectorielle, le système équivaut à 5 relations algébriques. Il est d'autre part presque superflu de faire remarquer, que les intégrales étant fonctions de la seule variable temps, le signe de dérivation $\frac{d}{dt}$ ne peut prêter à aucune équivoque. Notons enfin que, dans la dernière expression écrite, le travail des tensions est positif lorsqu'il est fourni par l'extérieur et qu'il en est de même pour les échanges thermiques.

Des calculs classiques permettent de passer de l'expression intégrale des principes de conservation à leur forme locale (L 12, L 19, A 30) :

$$(2-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} + \operatorname{div}_M \rho \vec{u} = 0 \\ \frac{D}{Dt} \rho u^j + \operatorname{div}_M \rho u^j \vec{u} = \rho F^j + \operatorname{div}_M \vec{\sigma}_j \quad (j=1, 2, 3) \\ \frac{D}{Dt} \rho \left(E + \frac{1}{2} u^j u^j \right) + \operatorname{div}_M \rho \left(E + \frac{1}{2} u^j u^j \right) \vec{u} = \rho F^j u^j + \operatorname{div}_M u^j \vec{\sigma}_j - \operatorname{div}_M \vec{q}. \end{array} \right.$$

$\frac{D}{Dt}$ étant une dérivée temporelle avec variables d'Euler x^i maintenues constantes, div_M signifiant la divergence prise pour ces variables x^i , et $\operatorname{div}_M(u^j \vec{\sigma}_j)$ étant donné par :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M(u^j \vec{\sigma}_j) &= \operatorname{div}_M(u^1 \vec{\sigma}_1 + u^2 \vec{\sigma}_2 + u^3 \vec{\sigma}_3) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^1} (u^1 \sigma_1^1 + u^2 \sigma_2^1 + u^3 \sigma_3^1) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^2} (u^1 \sigma_1^2 + u^2 \sigma_2^2 + u^3 \sigma_3^2) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^3} (u^1 \sigma_1^3 + u^2 \sigma_2^3 + u^3 \sigma_3^3). \end{aligned}$$

Sous cette forme, ces expressions sont valables *en repère orthonormé uniquement*. La première est connue sous le nom d'équation de continuité, le groupe des trois suivantes constitue les équations du mouvement proprement dites, et la dernière exprime le bilan d'énergie. Aucune hypothèse n'a été faite sur la nature de la substance, en dehors de sa continuité, et la validité des relations obtenues est universelle.

En tenant compte de l'équation de continuité et de l'identité

$$(II-2-3) \quad \operatorname{div}_M(R \vec{u}) = R \operatorname{div}_M \vec{u} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}_M R}$$

valable pour un scalaire R quelconque, je puis décrire le nouveau système :

$$(II-2-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} + \operatorname{div}_M(\rho \vec{u}) = 0 \\ \rho \left[\frac{Du^j}{Dt} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}_M} u^j \right] = \rho F^j + \operatorname{div}_M \vec{\sigma}_j \\ \rho \left[\frac{DE}{Dt} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}_M} E \right] = \vec{\sigma}_j \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}_M} u^j - \operatorname{div}_M \vec{q} \quad (\text{sommation sur } j). \end{array} \right.$$

L'un et l'autre des deux systèmes d'équation équivalents (II-2-21) et (II-2-4) emploient le langage eulérien :

les variables indépendantes sont le temps et les coordonnées d'espace x^i ; la conductivité thermique et la chaleur spécifique, qui entre dans l'énergie E , sont supposées connues en fonction de la densité et de la température (ou

entropie). Dans ces conditions le flux de chaleur et l'énergie interne sont implicitement déterminées en fonction des grandeurs d'état élémentaires ρ , T (ou S) et $-\sigma$.

Les forces massiques étant par ailleurs supposées connues, il reste encore les 11 inconnues ρ , T , u^i et $-\sigma$ (6 composantes) pour 5 équations seulement.

Afin d'augmenter le nombre des relations entre les inconnues, nous introduirons dans le prochain chapitre l'équation d'état de la substance. Cette équation s'exprime par six relations portant sur les composantes du tenseur des tensions, sur la température ou l'entropie, sur les composantes du tenseur de déformation, et sur les dérivées de toutes ces grandeurs. A première vue, nous n'aurons ainsi rien gagné, puisque six nouvelles inconnues se seront introduites, les six composantes du tenseur de déformation. Mais celles-ci peuvent s'exprimer à partir des dérivées des trois composantes du déplacement ξ^i et comme il en est de même des trois composantes u^i de la vitesse, nous restons donc en présence de 11 relations pour les 11 inconnues ρ , T (ou S) ξ^i et $-\sigma$ ⁽¹⁾. Le nombre d'équations étant égal au nombre d'inconnues, nous pouvons espérer, pour des conditions initiales données [densité, température (ou entropie) et position] et des conditions aux limites [température et sollicitations sur les surfaces frontière, ainsi que forces massiques au cours du temps données], trouver une solution :

$$(II-2-5) \quad \begin{cases} \rho(x^i, t) \\ T(x^i, t) \quad [\text{ou } S(x^i, t)] \\ \xi^j(x^i, t). \end{cases}$$

Nous pouvons aussi exprimer les relations du système (II-2-15) en adoptant les variables lagrangiennes que sont le temps t et les trois paramètres a^j . Considérant en effet un élément de substance, la variation d'une grandeur quelconque R qui lui est attachée est au cours du temps :

$$(II-2-6) \quad \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{DR}{Dt} + \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}}_M R.$$

en désignant par $\frac{\Delta}{\Delta t}$ une dérivée temporelle avec variables lagrangiennes a^j maintenues fixes.

Le système (II-2-7) peut alors d'écrire :

$$(II-2-7) \quad \begin{cases} \frac{\Delta}{\Delta t} (\rho \det P) = 0 \\ \rho \frac{\Delta u^j}{\Delta t} = \rho F^j + \text{div}_M \vec{\sigma}_j \quad (j=1, 2, 3) \\ \rho \frac{\Delta E}{\Delta t} = \vec{\sigma}_j \cdot \vec{\text{grad}}_M u^j - \text{div}_M \vec{q} \quad (\text{sommation sur } j). \end{cases}$$

⁽¹⁾ Ce choix des inconnues n'a rien d'absolu, et d'autres variables pourront être utilisées l'essentiel étant d'avoir un nombre de relations égal au nombre d'inconnues.

Sous cette forme ces expressions ne sont évidemment pas purement lagrangiennes. Seuls leurs premiers membres le sont; leurs seconds membres font intervenir les variables d'Euler x^i . L'élimination de ces variables doit se faire de la manière suivante :

On a $\frac{\partial R}{\partial x^i} = \frac{\partial R}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^i}$ avec $i = 1, 2, 3$ et chaque fois sommation sur l'indice j et dans ces expressions les $\frac{\partial \alpha^j}{\partial x^i}$ doivent être exprimés en fonction des $\frac{\partial x^i}{\partial x^j}$.

Dans le cas général, la forme lagrangienne est donc très complexe. Elle peut cependant être extrêmement utile dans le cas des mouvements unidimensionnels.

Multiplions dans le dernier tableau (II-2-77) l'expression centrale par u^i et sommons; il vient :

$$(II-2-8) \quad \frac{1}{2} \rho \frac{\Delta u^j u^j}{\Delta t} = \rho F^j u^j + u^j \operatorname{div}^M \vec{\sigma}_j \quad (\text{somme sur } j).$$

et par ailleurs :

$$(II-2-7,3) \quad \rho \frac{\Delta E}{\Delta t} = \vec{\sigma}_j \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}_M u^j} - \operatorname{div}_M \vec{q} \quad (\text{somme sur } i).$$

Pour un volume élémentaire de substance donné, ces deux expressions donnent la variation d'énergie cinétique et d'énergie interne spécifiques au cours du temps. On remarquera que les forces massiques n'interviennent directement que dans l'accroissement d'énergie cinétique. Leur contribution à l'accroissement d'énergie interne se fait par l'intermédiaire des tensions.

3. Un cas particulier, important pour la suite, est celui où deux des variables spatiales peuvent être éliminées. C'est le cas du *mouvement par tranches planes*. Toutes les grandeurs caractéristiques ne dépendent alors, dans chaque plan perpendiculaire à une certaine direction x^1 , que du temps. L'indice devenant inutile, nous le supprimons, dans les expressions suivantes, sur la variable $x^1 = x$. Le système d'équations (II-2-2) devient, *en supposant que les forces massiques sont identiquement nulles* :

$$\begin{aligned} & \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^1) = 0 \\ & \frac{D}{Dt} (\rho u^1) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^1 u^1) = \frac{\partial \sigma_1^1}{\partial x} \\ & \frac{D}{Dt} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^1 u^2) = \frac{\partial \sigma_2^1}{\partial x} \\ & \frac{D}{Dt} (\rho u^3) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^1 u^3) = \frac{\partial \sigma_3^1}{\partial x} \\ & \frac{D}{Dt} \rho \left[E + \frac{1}{2} (u^1 u^1 + u^2 u^2 + u^3 u^3) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \rho \left[E + \frac{1}{2} (u^1 u^1 + u^2 u^2 + u^3 u^3) \right] u^1 \\ & \quad = \frac{\partial}{\partial x} \left[u^1 \sigma_1^1 + u^2 \sigma_2^1 + u^3 \sigma_3^1 \right] - \frac{\partial q^1}{\partial x}. \end{aligned}$$

Supposons le phénomène STATIONNAIRE dans un certain repère que nous caractériserons par la variable spatiale y . Il vient, les vitesses dans le repère stationnaire étant désignées par $\vec{v}$:

$$(II-3-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dy} (\rho v^1) = 0 \\ \frac{d}{dy} (\rho v^1 v^1 - \sigma_1^1) = 0 \\ \frac{d}{dy} (\rho v^1 v^2 - \sigma_2^1) = 0 \\ \frac{d}{dy} (\rho v^1 v^3 - \sigma_3^1) = 0 \\ \frac{d}{dy} \left[\rho v^1 \left(E + \frac{1}{2} (v^1 v^1 + v^2 v^2 + v^3 v^3) \right) \right. \\ \left. - (v^1 \sigma_1^1 + v^2 \sigma_2^1 + v^3 \sigma_3^1) + q^1 \right] = 0. \end{array} \right.$$

Les équations s'intègrent une fois et fournissent les intégrales premières du mouvement :

$$(II-3-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho v^1 = m \\ \rho v^1 v^1 - \sigma_1^1 = B^1 \\ \rho v^1 v^2 - \sigma_2^1 = B^2 \\ \rho v^1 v^3 - \sigma_3^1 = B^3 \\ \rho v^1 \left[E + \frac{1}{2} (v^1 v^1 + v^2 v^2 + v^3 v^3) \right] - [v^1 \sigma_1^1 + v^2 \sigma_2^1 + v^3 \sigma_3^1] + q^1 = C. \end{array} \right.$$

Tenant compte de la première de ces relations et de la symétrie du tenseur des tensions, les trois relations centrales peuvent s'écrire :

$$m \vec{v} - \vec{\sigma}_1 = \vec{B}$$

et le bilan d'énergie devient :

$$m \left[E + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right] - \vec{v} \cdot \vec{\sigma}_1 + q^1 = C.$$

Groupons le système d'intégrales premières obtenues pour le mouvement stationnaire par tranches planes :

$$(II-3-4) \quad \boxed{\begin{array}{l} \rho v^1 = m \\ m \vec{v} - \vec{\sigma}_1 = \vec{B} \\ m \left[E + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right] - \vec{v} \cdot \vec{\sigma}_1 + q^1 = C. \end{array}}$$

Il est intéressant de remarquer que, dans ces expressions, n'intervient que la tension qui agit sur les tranches. Ce qui s'explique pour les raisons suivantes :

La nature même du problème stationnaire par tranches planes exige que les distances radiales restent invariantes dans une tranche « matérielle » quelconque dont on suit l'évolution au cours du temps. Toutes les grandeurs sont en effet fonctions de la seule abscisse axiale y et sont par conséquent les mêmes pour toutes les particules de la tranche. Autrement dit, les trajectoires suivies au cours du temps par les différentes particules d'une tranche sont des courbes parallèles. La tranche ne peut se déplacer qu'en bloc : ce déplacement sera soit une translation parallèle à la direction y , soit une telle translation combinée avec un glissement perpendiculaire à la direction y . Dans les deux cas il sera entièrement déterminé par la tension σ_1 sur la tranche; cette tension sera perpendiculaire à la tranche pour la translation parallèle, oblique pour la translation combinée avec un glissement latéral.

La distance entre deux plans perpendiculaires à l'axe de propagation Oy changera en général au cours du mouvement, par suite de quoi la densité de la substance changera. Transformation qui, à son tour, introduira dans la substance des tensions radiales $\vec{\sigma}_2$ et $\vec{\sigma}_3$. Ces dernières seront normales ou obliques sur leurs faces comme $\vec{\sigma}_1$. Mais, *étant des conséquences*, elles n'ont pas à intervenir dans les équations qui commandent le mouvement par tranches. Il va sans dire que ce sont elles cependant qui, à moins d'avoir instauré des conditions aux limites appropriées, rendent ce mouvement impossible au bout de très peu de temps.

Des intégrales premières du mouvement, je peux tirer d'autres relations qui seront utiles pour la suite, en introduisant simultanément deux tranches perpendiculaires à la direction y . Désignant ces tranches par (') et (') je puis écrire, d'après les deux premières relations (II-3-4) :

$$(II-3-5) \quad \rho' v'^1 = \rho'' v''^1 = m$$

$$(II-3-6) \quad \rho' v'^1 v'^1 - \sigma_1'^1 = \rho'' v''^1 v''^1 - \sigma_1''^1$$

d'où je tire :

$$(II-3-7) \quad m^2 = \frac{\sigma_1''^1 - \sigma_1'^1}{\tau'' - \tau'}$$

les τ étant les volumes spécifiques, c'est-à-dire les inverses des densités. La deuxième relation (II-3-4) me donne :

$$(II-3-8) \quad \vec{v} = \frac{1}{M} (\vec{\sigma}_1 + \vec{B})$$

à la suite de quoi, le bilan d'énergie peut s'écrire :

$$(II-3-9) \quad E = \frac{C}{m} + \frac{1}{2m^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_1 - \vec{B} \cdot \vec{B}) - \frac{q^1}{m}$$

Appliquant ces deux dernières relations aux deux tranches en question, et récrivant la valeur trouvée pour m , il vient :

$$(II-3-10) \quad \left. \begin{aligned} m^2 &= \frac{\sigma''_1 - \sigma'_1}{\tau'' - \tau'} \\ \vec{v}'' - \vec{v}' &= \frac{1}{m} (\vec{\sigma}''_1 - \vec{\sigma}'_1) \\ E'' - E' &= \frac{1}{2m^2} (\vec{\sigma}''_1 + \vec{\sigma}'_1) \cdot (\vec{\sigma}''_1 - \vec{\sigma}'_1) - \frac{1}{m} (q''_1 - q'_1), \end{aligned} \right\}$$

Ces conséquences directes des intégrales premières du mouvement stationnaire par tranches planes peuvent être appelées les *relations de Rankine-Hugoniot généralisées*. Il est connu en effet que la propagation d'une onde de choc plane entretenue est un cas particulier du mouvement que nous étudions. Et ce sont RANKINE (H 56) et HUGONIOT (H 72) qui, dans l'étude de ce cas particulier, et sans tenir compte de glissement latéraux possibles, en ont pour la première fois donné les équation complètes. RICHTER, dans un rapport, a récemment tenu compte d'un effet de cisaillement pouvant apparaître par suite d'une anisotropie primitive du milieu. La forme vectorielle que j'ai donnée à ces relations généralisées, ainsi que la manière dont elles ont été obtenues, sont nouvelles à ma connaissance.

Il est facile de retrouver, à partir de ces relations, les relations de RANKINE-HUGONIOT classiques. En l'absence de glissements latéraux la tension $\vec{\sigma}_1$ est en effet perpendiculaire aux tranches et se confond avec sa composante σ_1 ; le système d'équation (II-3-10) se transforme alors en le système suivant :

$$(II-3-11) \quad \left\{ \begin{aligned} m^2 &= \frac{\sigma''_1 - \sigma'_1}{\tau'' - \tau'} \\ v''_1 - v'_1 &= \frac{1}{m} [(\sigma''_1 + \sigma'_1) (\tau'' - \tau')]^{\frac{1}{2}} \\ E'' - E' &= \frac{1}{2} (\sigma''_1 + \sigma'_1) (\tau'' - \tau') \end{aligned} \right.$$

où l'on reconnaît les relations de RANKINE-HUGONIOT.

Toutes ces relations supposent le phénomène stationnaire et, dans le cas d'une onde de choc entretenue, le repère dans lequel cette condition est réalisée, se trouve lié au front de l'onde. Les vitesses particulières intervenant dans ces relations sont donc des vitesses relatives au front de l'onde.

Rappelons enfin que la manière dont ces relations ont été obtenues fait clairement apparaître leur indépendance à l'égard du phénomène « onde de choc ». Ce sont des intégrales premières du mouvement stationnaire par tranches planes et il se trouve que l'onde de choc entretenue est un cas particulier d'un tel mouvement. Par suite de quoi ces relations s'appliquent à l'onde de choc, *pourvu qu'elle soit plane et entretenue*. Aucune hypothèse particulière sur le profil de l'onde ne vient en restreindre la validité. Nous

verrons plus loin comment cette remarque permet de déterminer ce profil à partir des relations (II-3-11).

Si nous revenons maintenant au système d'équations du mouvement (II-2-2) son intégration n'est plus possible, même en nous plaçant dans le cas d'un mouvement permanent et en admettant que les forces massiques sont nulles. La possibilité d'intégrer une fois les équations du mouvement est limitée au mouvement par tranches planes. Mais un procédé fort différent va nous permettre de retrouver encore des relations dans lesquelles nous reconnaitrons les « relations RANKINE-HUGONOT généralisées ». Ce procédé, fort connu, n'est en général appliqué qu'au cas particulier du fluide parfait (L 11, L 12), conduisant alors aux relations d'HUGONOT classiques.

Je reviens au volume $V(t)$ considéré dans le premier paragraphe de ce chapitre et à l'expression intégrale des principes de conservation (système de relations (II-2-1) et je suppose ce volume scindé en deux parties par une surface $\Sigma(t)$ de forme et de mouvement absolument quelconques, de part et d'autre de laquelle les grandeurs caractéristiques de la substance telles que densité, vitesse particulière, tension, etc., prennent des valeurs entièrement différentes. La surface $\Sigma(t)$ est donc une discontinuité mobile pour les propriétés de la substance.

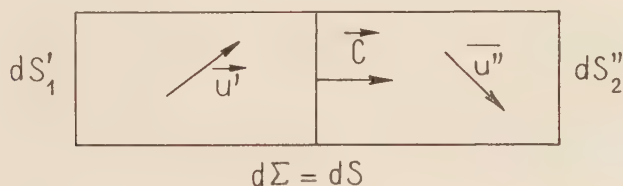


Fig. 1

Affectant encore d'un (') l'une des portions de volume et d'un (') l'autre portion, désignant par $\vec{n}$ la normale extérieure à $S'(t)$ et à $S''(t)$ et la normale sur $\Sigma(t)$ orientée de (V') vers (V'') , appelant enfin $\vec{C}$ la vitesse de déplacement de $\Sigma(t)$ et appliquant la formule de dérivation sur une intégrale à limites variables, il vient pour une grandeur scalaire R quelconque :

$$(II-3-12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} R dV &= \int_{V'(t)} \frac{DR}{Dt} dV + \int_{V''(t)} \frac{DR}{Dt} dV + \int_{S'(t)} R \vec{u} \cdot \vec{n} dS \\ &+ \int_{S''(t)} R \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Sigma(t)} (R' - R'') \vec{C} \cdot \vec{n} dS. \end{aligned} \right.$$

Dans le dernier terme de cette expression la valeur de R de part et d'autre de la surface $\Sigma(t)$, à proximité immédiate de la surface, a été distinguée par les indices (') et (').

Considérant alors (fig. 1) en un point quelconque de la surface $\Sigma(t)$ un cylindre de section infiniment petite et de génératrices normales à $\Sigma(t)$, fai-

sant tendre de part et d'autre de $\Sigma(t)$ ses bases l'une vers l'autre jusqu'à ce qu'elles se confondent sur $\Sigma(t)$, la relation précédente devient :

$$(II-3-13) \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t)} R dV = [R' (\vec{C} - \vec{u}') \cdot \vec{n} - R'' (\vec{C} - \vec{u}'') \cdot \vec{n}] dS.$$

Pour la masse on a $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} R dV = 0$ avec $R = \rho u^i$ d'où :

$$(II-3-14) \quad \rho' (\vec{C} - \vec{u}') \cdot \vec{n} - \rho'' (\vec{C} - \vec{u}'') \cdot \vec{n} = 0.$$

Pour la quantité de mouvement on a en l'absence de forces massiques :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} R dV = \int_{S(t)} \sigma_n^i dS \quad \text{avec} \quad R = \rho u^i$$

d'où :

$$(II-3-15) \quad \rho' u'^i (\vec{C} - \vec{u}') \cdot \vec{n} - \rho'' u''^i (\vec{C} - \vec{u}'') \cdot \vec{n} = \sigma_n^i - \sigma_n'^i$$

(avec successivement $i = 1, 2, 3$).

Pour l'énergie on a enfin, en l'absence de forces massiques

$$(II-3-16) \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t)} R dV = \int_{S(t)} \vec{\sigma}_n \cdot \vec{u} dS - \int_{S(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} dS$$

avec

$$R = \rho \left[E + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right]$$

d'où :

$$(II-3-16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \rho' \left[E' + \frac{1}{2} \vec{u}' \cdot \vec{u}' \right] [\vec{C} - \vec{u}'] \cdot \vec{n} - \rho'' \left[E'' + \frac{1}{2} \vec{u}'' \cdot \vec{u}'' \right] [\vec{C} - \vec{u}''] \cdot \vec{n} \\ & = \vec{u}'' \cdot \vec{\sigma}_n'' - \vec{u}' \cdot \vec{\sigma}_n' - (\vec{q}'' - \vec{q}') \cdot \vec{n}. \end{aligned} \right.$$

Récrivons les expressions obtenues, en introduisant, pour le principe de la quantité de mouvement, la notation vectorielle. Il vient :

$$(II-3-17) \quad \left\{ \begin{aligned} & \rho' [\vec{C} - \vec{u}'] \cdot \vec{n} = \rho'' [\vec{C} - \vec{u}''] \cdot \vec{n} = -m \\ & -m \vec{u}' + m \vec{u}'' = \vec{\sigma}_n'' - \vec{\sigma}_n' \\ & -m \left[E' + \frac{1}{2} \vec{u}' \cdot \vec{u}' \right] + m \left[E'' + \frac{1}{2} \vec{u}'' \cdot \vec{u}'' \right] \\ & = \vec{u}'' \cdot \vec{\sigma}_n'' - \vec{u}' \cdot \vec{\sigma}_n' - (\vec{q}'' - \vec{q}') \cdot \vec{n} \end{aligned} \right.$$

ou encore :

$$(II-3-18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho' [\vec{C} - \vec{u}'] \cdot \vec{n} = \rho'' [\vec{C} - \vec{u}'] \cdot \vec{n} = -m \\ m \vec{u}' - \vec{\sigma}'_n = m \vec{u}'' - \vec{\sigma}''_n \\ m \left[E' + \frac{1}{2} \vec{u}' \cdot \vec{u}' \right] - \vec{u}' \cdot \vec{\sigma}'_n + \vec{q}' \cdot \vec{n} \\ \qquad \qquad \qquad = m \left[E'' + \frac{1}{2} \vec{u}'' \cdot \vec{u}'' \right] - \vec{u}'' \cdot \vec{\sigma}''_n + \vec{q}'' \cdot \vec{n} \end{array} \right.$$

Ces relations ont une analogie formelle frappante avec celles du système (II-3-4). En introduisant les vitesses relatives à la discontinuité $\Sigma(t)$, nous allons constater qu'elles sont identiques. Posons en effet : $\vec{u} = \vec{v} + \vec{C}$.

Il vient :

$$\begin{aligned} \rho' \vec{v}' \cdot \vec{n} &= \rho'' \vec{v}'' \cdot \vec{n} = m \\ m \vec{v}' - \vec{\sigma}'_n &= m \vec{v}'' - \vec{\sigma}''_n = \vec{B} \\ m \left[E' + \frac{1}{2} \vec{v}' \cdot \vec{v}' \right] - \vec{v}' \cdot \vec{\sigma}'_n + m \vec{v}' \cdot \vec{C} - \vec{\sigma}'_n \cdot \vec{C} + \vec{q}' \cdot \vec{n} \\ &= m \left[E'' + \frac{1}{2} \vec{v}'' \cdot \vec{v}'' \right] - \vec{v}'' \cdot \vec{\sigma}''_n + m \vec{v}'' \cdot \vec{C} - \vec{\sigma}''_n \cdot \vec{C} + \vec{q}'' \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

où :

$$m \left[E' + \frac{1}{2} \vec{v}' \cdot \vec{v}' \right] - \vec{v}' \cdot \vec{\sigma}'_n + \vec{q}' \cdot \vec{n} = m \left[E'' + \frac{1}{2} \vec{v}'' \cdot \vec{v}'' \right] - \vec{v}'' \cdot \vec{\sigma}''_n + \vec{q}'' \cdot \vec{n} = C.$$

D'où la conclusion :

En chaque point de la surface de discontinuité locale, animée d'un mouvement *quelconque*, le phénomène est commandé par les mêmes relations que dans le cas du mouvement adiabatique et stationnaire par tranches planes.

Le fait s'explique aisément : chaque élément d'aire de la surface $\Sigma(t)$ peut être confondu avec un élément plan à des infiniment petits près. Mais voici un remarque qui est plus importante :

Nous avons admis que la *zone de transition* faisant passer la substance d'un état (') à un état (') entièrement différent est d'épaisseur nulle. La conséquence de cette hypothèse importante est l'extension de la validité des relations qui commandent le phénomène permanent au phénomène non permanent. Dans la réalité physique, nous pouvons donc nous attendre à pouvoir appliquer nos relations d'HUGONOT aux ondes accélérées ou ralenties avec une approximation d'autant plus satisfaisante que l'épaisseur de la zone de transition est plus faible. La validité de ces relations aux ondes de choc même fortement amorties s'explique donc par le fait que ces ondes ont une épaisseur quasi nulle.

CHAPITRE III

ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE ET ONDES PERMANENTES

Les ondes de choc planes entretenues sont un cas particulier du mouvement par tranches planes en l'absence de forces massiques. Il semble que les effets de cisaillement puissent en général être négligés, ce qui permet de se limiter aux relations d'HUGONIOU classiques.

Considérons une telle onde de choc et, pour fixer les idées, précisons que nous avons en vue une onde de compression. Elle est composée d'une zone de compression très étroite (d'épaisseur de l'ordre de quelques libres parcours moyens), appelée le *front de l'onde*, et d'une zone d'épaisseur appréciable dans laquelle la substance revient à un état de pression normal : c'est la *zone de décompression*. Dans cette dernière zone le mouvement cesse d'ailleurs d'être un mouvement par tranches planes pur, les pressions radiales engendrées dans le front d'onde entraînant une expansion latérale, les interférences entre le mouvement propre de la substance et le dispositif générateur de l'onde donnant d'autre part lieu à de nombreuses perturbations. Le cas-limite idéal peut cependant être approché avec plus ou moins de bonheur par certaines dispositions expérimentales appropriées. Mais le plus souvent l'étude expérimentale des ondes de choc s'intéresse uniquement à l'état de la substance immédiatement derrière le front d'onde, région dans laquelle ces diverses perturbations n'ont pu jouer encore.

Dans notre manière de voir, l'onde de choc est un cas particulier d'une onde plane permanente, caractérisée par le profil qualitatif suivant (fig. 2) :

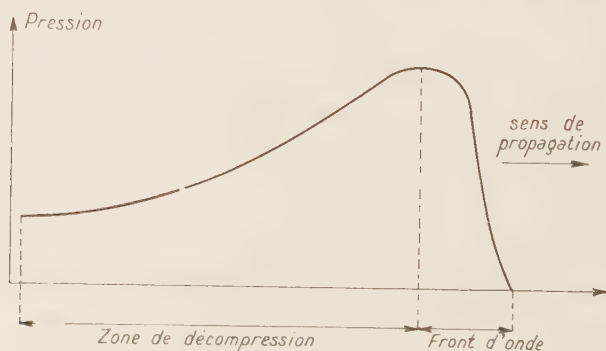


Fig. 2

L'onde étant supposée permanente, ce profil se déplace en bloc, sans déformation, à vitesse constante de la gauche vers la droite. Dans un repère animé d'un tel mouvement le phénomène est stationnaire. Une substance étant définie par son équation d'état, nous pouvons alors nous poser les problèmes suivants :

- a. Déterminer le profil des ondes permanentes dans la substance au moyen des relations d'HUGONOT pour voir si ce profil autorise d'être appelé une onde de choc;
- b. Voir si de tels profils peuvent apparaître spontanément à partir d'ondes qui se déforment en cours de propagation;
- c. Mettre en évidence les conditions de production artificielle d'ondes de choc.

Réservant le troisième problème pour la partie expérimentale de ce travail, nous allons rapidement rappeler la résolution du second problème pour le cas des substances admettant des équations d'état simples (L 11, L 12, L 23, H 44, H 45, H 46, H 72, A 41, A 113, A 48, A 125, A 126), avant de nous étendre assez longuement sur le premier problème mentionné.

§ 1. Cas du fluide idéal (L 11, L 12, H 44, H 45, H 46, H 72, A 41, A 113).

Nous conservons les grandeurs $\sigma_1^1 = -p$ et $\varepsilon_1 = \frac{p^0}{\rho} - 1$ afin de rendre plus aisée la comparaison avec le cas solide. Traçons la courbe de l'équation caractéristique $\sigma_1^1 = g(\varepsilon_1)$ et celles de ses dérivées du premier et du second ordre (fig. 3).

Nous lisons les relations universellement valables

$$(III-1-1) \quad \begin{cases} \frac{d\sigma_1^1}{d\varepsilon_1} = 0 \\ \frac{d^2\sigma_1^1}{d\varepsilon_1^2} \leq 0 \end{cases}$$

Considérons un profil d'onde limité par les états extrêmes ε'_1 , et ε''_1 et supposons-le d'épaisseur finie : deux cas doivent être distingués :

a. L'état ε'_1 se trouve en tête de l'onde et l'état ε''_1 en arrière. Nous sommes en présence d'une onde de décompression (ou raréfaction). La courbe II donne par ses ordonnées la célérité lagrangienne de chaque état de déformation. Nous voyons donc que de l'avant à l'arrière de l'onde les états de déformation se déplacent de moins en moins vite. *Au cours de sa progression l'onde de décompression s'étale.*

b. L'état ε''_1 se trouve en tête de l'onde et l'état ε'_1 en arrière. Nous sommes en présence d'une onde de compression. De l'avant à l'arrière de l'onde les états de déformation se déplacent de plus en plus vite. *Au cours de sa progression l'onde de compression se rétrécit et devient en fin de compte une discontinuité : une onde de choc est née.* Que se passe-t-il alors? Nous avons établi dans le précédent chapitre les équations qui régissent le mouvement d'une

telle discontinuité et nous avons trouvé en particulier que sa vitesse de propagation est donnée par l'expression suivante tirée des relations d'HUGONIOT :

$$(III-1-2) \quad C = \sqrt{\frac{\sigma_1'' - \sigma_1'}{\rho_0 \frac{\varepsilon_1'' - \varepsilon_1'}{1 + \varepsilon_1'}}}$$

Admettons l'existence initiale d'une telle discontinuité : s'il s'agit d'un choc de décompression, il est essentiellement instable et amorce d'emblée sa transformation en onde de décompression d'épaisseur finie.

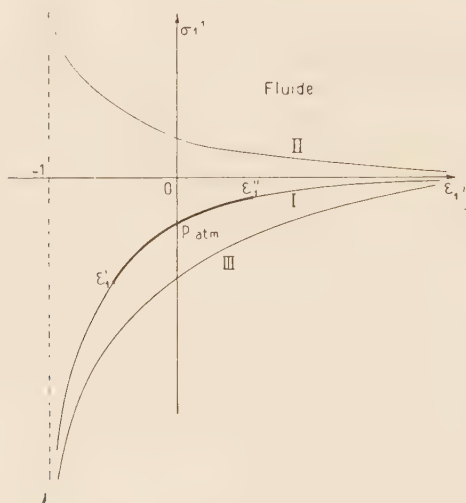


Fig. 3

S'il s'agit d'un choc de compression, il est stable et il se propage conformément aux lois obtenues pour les discontinuités.

En résumé, nous pouvons dire que dans un fluide idéal les ondes de compression ont tendance à devenir des chocs qui se maintiennent par la suite, tandis que les ondes de décompression subissent un étalement continu, une conséquence de ce fait étant l'instabilité essentielle des chocs de décompression.

§ 2. Cas du solide idéal (L 23, A 48, A 125, A 126)

Un solide se distingue d'un fluide par le fait de pouvoir subir des tensions négatives et positives. Sur la figure 4 ci-contre, j'ai représenté la courbe de l'équation caractéristique d'un tel solide. Du côté des tensions cette courbe est évidemment limitée par le phénomène de la fracture.

La partie rectiligne couvre le domaine élastique linéaire (domaine de validité de la loi de HOOKE).

Ensuite vient une partie de concavité tournée vers l'abscisse qui couvre le domaine plastique au sens où l'entendent VON KARMAN (A 48), TAYLOR, RAKHMATULIN, WHITE-VAN GRIFFIS (A 125) et WOOD (A 126).

Ces deux domaines peuvent en première approximation être supposés symétriques par rapport à l'origine.

Au-delà commence, du côté des tensions, le domaine d'allongement extrêmement rapide qui précède la fracture, tandis que du domaine des compressions la courbe a un point d'inflexion et tend asymptotiquement vers la droite $\varepsilon_1 = -1$. Cette courbe permet de distinguer différents cas concernant l'évolution des profils d'onde. Lorsqu'un profil permanent s'est constitué, il se déplace avec la célérité donnée par (III-1-2).

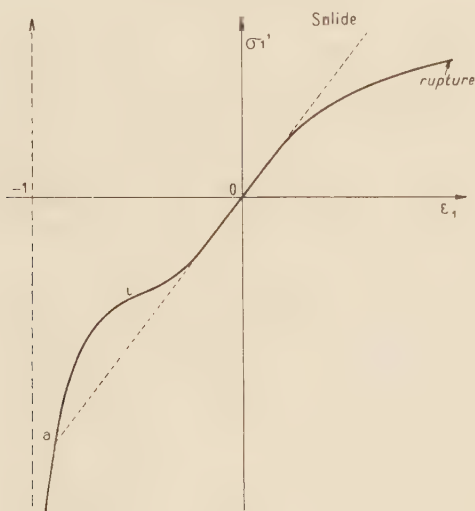


Fig. 4

Limitons-nous aux ondes qui sont possibles à partir de l'état non déformé de la substance (III-1-26) s'écrit :

$$(III-1-3) \quad C = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{\sigma_1''}{\varepsilon_1'}}.$$

Ondes de raréfaction. — Tant que le point caractéristique de l'arrière de l'onde se trouve sur la droite élastique, tous les états de déformation ont même vitesse et l'onde se propage en conservant son profil.

Lorsque le point caractéristique de l'arrière de l'onde se trouve sur la branche plastique, on voit par contre que la tête élastique est seule à se déplacer à une vitesse commune à tous les états de déformation tandis que l'arrière plastique s'étale en cours de propagation.

Ondes de compression. — Tant que le point caractéristique de l'arrière de l'onde ne dépasse pas le point i , on est dans le même cas que pour les ondes de raréfaction.

Si l'intensité de l'onde dépasse le point i , la situation change. Les états de déformation situés au-delà de i ont en effet des vitesses de propagation qui croissent avec ε (en valeur absolue). Une part croissante de l'onde plastique est donc absorbée par ces états; à mesure que l'intensité de l'onde croît, il se forme à l'arrière un choc plastique de puissance et de vitesse de propagation croissantes. Lorsqu'on atteint le point a , la phase plastique est ramassée en un choc unique qui a même vitesse que la tête élastique pouvant avoir un profil quelconque. Au-delà enfin, la tête élastique est elle-même absorbée; on est entré dans le domaine du choc supersonique.

§ 3. Les solides visco-élastiques

Ces corps sont composés de deux ou de plusieurs phases élastiques et visqueuses, et l'hypothèse de l'*indépendance des phases* est faite. Il est admis en outre que chaque phase a des propriétés invariantes au cours du temps. Celles-ci sont exprimées par une relation entre certaines des grandeurs caractéristiques de la phase, et l'*équation d'état dynamique* de la substance s'obtient par composition des relations caractéristiques de chaque phase, suivant des lois qui vont être précisées. L'*équation d'état statique* de la substance se déduit de son équation dynamique par annulation simultanée de toutes les dérivées. Elle peut être vérifiée par une suite continue de valeurs couplées pour la tension et la déformation, auquel cas la substance admet dans tout un domaine des états d'équilibre simultané pour ces deux grandeurs. Elle peut aussi n'admettre un tel équilibre que pour certains couples de valeurs isolés.

En présence de deux phases, nous utiliserons les lois de compositions suivantes :

a. Il est supposé que le même état de tension existe dans les deux phases, et que les deux états de déformation partielle s'ajoutent pour donner l'état de déformation totale. C'est la *loi de composition en série* de MAXWELL (H 55).

b. Il est supposé que le même état de déformation existe dans les deux phases, et que les deux états de tension partielle s'ajoutent pour donner l'état tension totale. C'est la *loi de composition en parallèle* ou de KELVIN-VOIGT.

Lorsque nous serons en présence de plus de deux phases, nous obtiendrons l'équation d'état dynamique par application répétée de ces deux lois de composition.

Nous allons maintenant établir quelques équations d'état dynamiques en tenant compte des *déformations finies*. Donnons d'abord les relations qui caractérisent les phases individuelles.

A. PHASE ÉLASTIQUE. — En 1937, MURNAGHAN (A 70, L 19), utilisant des résultats connus dès la fin du XIX^e siècle (H 83, H 85, H 86), et les exprimant en langage matricio-tensoriel, a montré que l'équation d'état d'un milieu purement élastique peut s'écrire :

$$(III-2-1) \quad \sigma = \frac{\tau_1}{\tau_2} P \times \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} P$$

σ et η étant les tenseurs de tension et de déformation ⁽¹⁾, P étant la matrice (I-2-5) introduite au premier chapitre, et Φ étant l'énergie de déformation élastique par unité de volume initial. (En comparant l'expression précédente à celle que donne MURNAGHAN à la page 56 de son ouvrage, il faut tenir compte du fait qu'on a $J^x = P$ par suite de conventions différentes). Il suffit donc de connaître l'énergie de déformation en fonction de η pour en déduire l'équation d'état, que nous écrivons :

$$(III-2-2) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{f}}(\underline{\underline{\eta}}).$$

En milieu isotrope, les axes principaux du tenseur des tensions doivent coïncider avec ceux du tenseur de déformation. Il en résulte que l'équation d'état ci-dessus peut s'écrire :

$$(III-2-3) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{M_0}} \underline{\underline{E_3}} + \underline{\underline{M_1}} \underline{\underline{\eta}} + \underline{\underline{M_2}} \underline{\underline{\eta \eta}} + \underline{\underline{M_3}} \underline{\underline{\eta \eta \eta}} \dots$$

$M_0, M_1, \dots, M_i \dots$, étant des polynômes des invariants du tenseur de déformation, introduits au premier chapitre (voir les relations (I-6-2 à 7). E_3 est le tenseur-unité et les termes-produits ont la signification :

$$(III-2-4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\underline{\underline{\eta \eta}})_{ij} = \eta_{ik} \eta_{kj} & \text{sommation sur } k \\ (\underline{\underline{\eta \eta \eta}})_{ij} = \eta_{ik} \eta_{kl} \eta_{lj} & \text{sommation sur } k \text{ et } l \\ \text{etc } \dots \end{array} \right.$$

Mais η est symétrique. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON donne alors la formule de récurrence (A 86, A 82,4).

$$(III-2-5) \quad \underline{\underline{\eta \eta \eta}} = \underline{\underline{I_3}} \underline{\underline{E_3}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{I_2}} \underline{\underline{\eta}} + \underline{\underline{I_1}} \underline{\underline{\eta \eta}}$$

et l'équation d'état peut s'écrire :

$$(III-2-6) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{M_0}} \underline{\underline{E_3}} + \underline{\underline{M_1}} \underline{\underline{\eta}} + \underline{\underline{M_2}} \underline{\underline{\eta \eta}}$$

les coefficients M_0, M_1, M_2 étant des polynômes des invariants.

Un raisonnement analogue conduit à l'expression suivante :

$$(III-2-7) \quad \underline{\underline{\eta}} = \underline{\underline{C_0}} \underline{\underline{E_3}} + \underline{\underline{C_1}} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{C_2}} \underline{\underline{\sigma \sigma}}$$

qui est la réciproque de (III-2-6) et où, cette fois, les coefficients sont fonctions des invariants correspondants du tenseur σ .

⁽¹⁾ σ , tenseur des tensions eulérien.

η , tenseur de déformation lagrangien.

En repère orthonormé, la variance de ces tenseurs n'a pas à être précisée.

Que deviennent ces expressions dans le cas particulier de la déformation par tranches planes? Cette dernière s'écrit :

$$(III-2-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a + \xi(a) \\ y = b \\ z = c \end{array} \right.$$

Le tenseur de déformation a donc une seule composante non-nulle :

$$(III-2-9) \quad \eta_{aa} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} [(1 + \varepsilon_{aa})^2 - 1]$$

en posant

$$(III-2-10) \quad \varepsilon_{aa} = \frac{\partial \xi}{\partial a}.$$

On a les invariants :

$$(III-2-11) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \eta_{aa} \\ -\frac{1}{2} I'_2 = 0 \\ I'_3 = 0 \end{array} \right.$$

et (III-2-6) donne

$$(III-2-12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{aa} = M_0 + M_1 \eta_{aa} + M_2 \eta_{aa}^2 \\ \sigma_{bb} = M_0 \\ \sigma_{cc} = M_0 \end{array} \right.$$

les coefficients M_0, M_1, M_2 étant des polynômes de la seule grandeur η_{aa} .

Une déformation isotrope s'écrit d'autre part :

$$(III-2-13) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a + \xi(a) \\ y = b + \eta(b) \\ z = c + \zeta(c) \end{array} \right.$$

Les trois composantes diagonales du tenseur de déformation ont même valeur :

$$(III-2-14) \quad \eta = \frac{1}{2} [(1 + \varepsilon)^2 - 1]$$

en posant

$$(III-2-15) \quad \varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial a} = \frac{\partial \eta}{\partial b} = \frac{\partial \zeta}{\partial c}.$$

Les invariants sont donc :

$$(III-2-16) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = 3\eta \\ -\frac{1}{2}I_2 = 3\eta^2 \\ I_3 = \eta^3 \end{array} \right.$$

et (III-2-6) donne :

$$(III-2-17) \quad \bar{\sigma} = \sigma_{aa} = \sigma_{bb} = \sigma_{cc} = M_0 + M_1\eta + M_2\eta^2.$$

La tension normale moyenne de la déformation par tranches planes s'écrit d'autre part :

$$(III-2-18) \quad \bar{\sigma} = M_0 + \frac{1}{3}M_1\eta_{aa} + \frac{1}{3}M_2\eta_{aa}^2.$$

A réduction de volume égale, nous avons la relation

$$(III-2-19) \quad 1 + \varepsilon_{aa} = (1 + \varepsilon)^3$$

qui nous donne :

$$(III-2-20) \quad (1 + 2\eta_{aa})^{\frac{1}{2}} = (1 + 2\eta)^{\frac{3}{2}}$$

d'où

$$(III-2-21) \quad \eta_{aa} = \frac{1}{2} \left\{ (1 + 2\eta)^3 - 1 \right\}.$$

Ces expressions permettent l'étude comparée des états de tension attachés à ces deux types de déformation. On voit en particulier que la tension normale moyenne de la déformation par tranches planes est différente de la tension qui apparaît en déformation isotrope.

Nous ferons l'hypothèse qu'à déformation nulle la tension est nulle. Il en résulte que M_0 doit s'annuler avec la déformation.

L'approximation d'ordre 1 s'obtient en prenant

$$(III-2-22) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_0 = AI_1 \\ M_1 = B \\ M_2 = 0 \end{array} \right.$$

A et B étant des constantes.

Il vient alors pour la déformation par tranches planes :

$$(III-2-23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{aa} = (A + B)\eta_{aa} \\ \sigma_{bb} = A\eta_{aa} \\ \sigma_{cc} = A\eta_{aa} \end{array} \right.$$

$$(III-2-24) \quad \bar{\sigma} = \left(A + \frac{1}{3}B \right) \eta_{aa}$$

et pour la déformation isotrope :

$$(III-2-25) \quad \sigma = (3A + B) \eta.$$

C'est l'expression de la loi de HOOKE pour ces deux types de déformation. A réduction de volume égale, nous avons donc :

$$(III-2-26) \quad \sigma_{aa} - \sigma = (A + B) \frac{1}{2} \left\{ (1 + 2\eta)^3 - 1 \right\} - (3A + B) \eta$$

et

$$(III-2-27) \quad \bar{\sigma} - \sigma = \left(A + \frac{1}{3} B \right) \frac{1}{2} \left\{ (1 + 2\eta)^3 - 1 \right\} - (3A + B) \eta$$

soit

$$(III-2-28) \quad \sigma_{aa} - \sigma = A (\sigma \eta^2 + 4\eta^3) + B (2\eta + 6\eta^2 + 4\eta^3)$$

$$(III-2-29) \quad \bar{\sigma} - \sigma = A (6\eta^2 + 4\eta^3) + B \left(2\eta^2 + \frac{4}{3}\eta^3 \right).$$

On voit que, dans le domaine des petites déformations, ces expressions donnent :

$$(III-2-30) \quad \sigma_{aa} = \sigma + 2B\eta$$

$$(III-2-31) \quad \bar{\sigma} = \sigma$$

Mais si la loi élastique linéaire s'étend à un domaine de déformation dans lequel les puissances supérieures de η ne peuvent être négligées, ces dernières expressions ne s'appliquent pas.

Introduisons les coefficients de compressibilité et de rigidité, K et G; nous avons les relations :

$$(III-2-32) \quad \begin{cases} A = K - \frac{2}{3} G \\ B = 2G \end{cases}$$

L'approximation d'ordre 2 s'obtient en prenant :

$$(III-2-33) \quad \begin{cases} M_0 = AI_1 + CI_1^2 + D \left(-\frac{1}{2} I_2' \right) \\ M_1 = B + EI_1 \\ M_2 = F \end{cases}$$

A, B, C, D, E, F, étant des constantes.

Il vient alors pour la déformation par tranches planes :

$$(III-2-34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{aa} = (A + B) \eta_{aa} + (C + E + F) \eta_{aa}^2 \\ \sigma_{bb} = A \eta_{aa} + C \eta_{aa}^3 \\ \sigma_{cc} = A \eta_{aa} + C \eta_{aa}^3 \end{array} \right.$$

$$(III-2-35) \quad \bar{\sigma} = \left(A + \frac{1}{3} B \right) \eta_{aa} + \left(C + \frac{1}{3} E + \frac{1}{3} F \right) \eta_{aa}^2$$

et pour la déformation isotrope :

$$(III-2-36) \quad \sigma = (3A + B) \eta + (9C + 3D + 3E + F) \eta^2.$$

Quand les déformations sont petites, ces expressions se réduisent manifestement à celles de l'approximation linéaire.

B. PHASE VISQUEUSE. — Son équation d'état est $\sigma = \text{div}_m u E_3 + 2 \mu D$, $\vec{u}$ étant la vitesse particulière et D le tenseur (I-6-10). En déformation par tranches planes on a donc

$$(III-2-37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{aa} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{bb} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{cc} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \end{array} \right.$$

Si nous voulons que la tension normale moyenne correspondante soit nulle (hypothèse de STOKES habituellement faite) nous devons prendre $\lambda = -\frac{2}{3} \mu$.

Donnons à la première des expressions (III-2-37) la forme qui convient aux solides. Nous avons :

$$(III-2-38) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \Delta \xi}{\partial x \Delta t} = \frac{1}{\frac{\partial a}{\partial a}} \frac{\partial \Delta \xi}{\partial a \Delta t} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial a}} \frac{\partial \Delta \xi}{\Delta t \frac{\partial a}{\partial a}} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{aa}} \frac{\Delta \varepsilon_{aa}}{\Delta t}.$$

Tenant compte de

$$(III-2-39) \quad \varepsilon_{aa} = (1 + 2\eta_{aa})^2 - 1$$

il vient encore

$$(III-2-40) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + 2\eta_{aa}} \frac{\Delta \eta_{aa}}{\Delta t}$$

qui est un cas particulier de (I-8-66).

Nous avons donc pour l'équation d'état de la cellule visqueuse les deux expressions équivalentes :

$$(III-2-41) \quad \sigma_{aa} = \frac{\lambda + 2\mu}{1 + \varepsilon_{aa}} \frac{\Delta \varepsilon_{aa}}{\Delta t}$$

$$(III-2-42) \quad \sigma_{aa} = \frac{\lambda + 2\mu}{1 + 2\eta_{aa}} \frac{\Delta \eta_{aa}}{\Delta t}.$$

Les équations caractéristiques des phases individuelles étant ainsi précisées, il faut définir leurs lois de composition.

C. LA SUBSTANCE DE KELVIN-VOIGT. — Elle peut être schématisée par le modèle ci-contre (fig. 5) et conduit à ce que nous avons appelé la loi de composition en parallèle. Il n'y a qu'un état de déformation pour les deux phases et les tensions qui en résultent s'ajoutent pour donner la tension totale :

$$(III-2-43) \quad \sigma_{aa} = \sigma_{aa}^E + \sigma_{aa}^\mu.$$

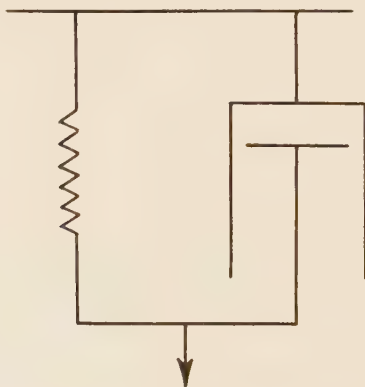


Fig. 5

Écrivons la relation caractéristique de la phase élastique :

$$(III-2-44) \quad \sigma_{aa} = f(\varepsilon_{aa})$$

d'où

$$(III-2-45) \quad \sigma_{aa} = F(\eta_{aa}).$$

Écrivons la relation caractéristique de la phase visqueuse :

$$(III-2-46) \quad \sigma_{aa} = \frac{\lambda + 2\mu}{1 + \varepsilon_{aa}} \frac{\Delta \varepsilon_{aa}}{\Delta t}$$

d'où

$$(III-2-47) \quad \sigma_{aa} = \frac{\lambda + 2\mu}{1 + 2\eta_{aa}} \frac{\Delta \eta_{aa}}{\Delta t}.$$

Les deux formes équivalentes de l'équation d'état dynamique de la substance de KELVIN-VOIGT sont donc :

$$(III-2-48) \quad \sigma_{aa} = f(\varepsilon_{aa}) + (\lambda + 2\mu) \frac{\frac{\Delta \varepsilon_{aa}}{\Delta t}}{1 + \varepsilon_{aa}}$$

et

$$(III-2-49) \quad \sigma_{aa} = F(\eta_{aa}) + (\lambda + 2\mu) \frac{\frac{\Delta \eta_{aa}}{\Delta t}}{1 + 2\eta_{aa}}.$$

On notera en passant que les équations d'état des fluides visqueux sont des cas particuliers des relations ci-dessus : les fluides sont donc des substances de KELVIN-VOIGT qui, dans leurs états d'équilibre, sont isotropes.

Exprimons l'équation d'état dynamique dans le repère lié au front d'onde en utilisant la première relation d'HUGONIOU :

$$(III-2-50) \quad v = -(1 + \varepsilon_{aa}) C$$

ou

$$(III-2-51) \quad v = -\sqrt{1 + 2\eta_{aa}} C$$

et

$$(III-2-52) \quad \frac{\Delta}{\Delta t} = v \frac{d}{dy}.$$

Il vient :

$$(III-2-53) \quad \sigma_{aa} = f(\varepsilon_{aa}) - (\lambda + 2\mu) C \frac{d\varepsilon_{aa}}{dy}$$

et

$$(III-2-54) \quad \sigma_{aa} = F(\eta_{aa}) - (\lambda + 2\mu) C.$$

Utilisons la seconde relation d'HUGONIOU :

$$(III-2-55) \quad \sigma_{aa} = \frac{C^2}{\tau_1} \varepsilon_{aa}$$

ou

$$(III-2-56) \quad \sigma_{aa} = \frac{C^2}{\tau_1} [\sqrt{1 + 2\eta_{aa}} - 1].$$

Il vient :

$$(III-2-57) \quad \frac{C^2}{\tau_1} \varepsilon_{aa} = f(\varepsilon_{aa}) - (\lambda + 2\mu) C \frac{d\varepsilon_{aa}}{dy}$$

et

$$(III-2-58) \quad \frac{C^2}{\tau_1} [\sqrt{1 + 2\eta_{aa}} - 1] = F(\eta_{aa}) - (\lambda + 2\mu) C \frac{\frac{d\eta_{aa}}{dy}}{\sqrt{1 + 2\eta_{aa}}}.$$

De ces relations, je tire :

$$(III-2-59) \quad dy = (\lambda + 2\mu) C \frac{d\varepsilon_{aa}}{f(\varepsilon_{aa}) - \frac{C^2}{\tau_1} \varepsilon_{aa}}$$

et

$$(III-2-60) \quad dy = (\lambda + 2\mu) C \frac{\frac{d\eta_{aa}}{dy}}{\sqrt{1 + 2\eta_{aa}} \left[F(\eta_{aa}) - \frac{C^2}{\tau_1} (\sqrt{1 + 2\eta_{aa}} - 1) \right]}.$$

Écrivant enfin l'équation d'état statistique qui se déduit de (48) ou (49) par annulation des dérivées, il vient :

$$(III-2-61) \quad \sigma_{aa} = f(\varepsilon_{aa})$$

et

$$(III-2-62) \quad \sigma_{aa} = F(\eta_{aa}).$$

L'équation d'état statique de la substance de KELVIN-VOIGT se confond donc avec la relation caractéristique de la phase élastique. Ce résultat est assez évident si l'on songe que, dans une telle substance la déformation est la même pour les deux phases, et qu'à déformation constante, la phase visqueuse donne une tension nulle.

Nous obtiendrons les états d'équilibre pouvant être atteints par onde permanente à partir de l'état initial en combinant l'équation d'état statique avec les deux premières relations d'HUGONIOU. Nous trouvons ainsi :

$$(III-2-63) \quad \begin{cases} (1) & \sigma_{2aa} = f(\varepsilon_{2aa}) \\ (2) & v_2 = - (1 + \varepsilon_{2aa}) \sqrt{\tau_1 \frac{f'(\varepsilon_{2aa})}{\varepsilon_{2aa}}} \\ (3) & C = \sqrt{\tau_1 \frac{f'(\varepsilon_{2aa})}{\varepsilon_{2aa}}} \end{cases}$$

ou

$$(III-2-64) \quad \begin{cases} (1) & \sigma_{2aa} = F(\eta_{2aa}) \\ (2) & v_2 = -\sqrt{1+2\eta_{aa}} \sqrt{\frac{\tau_1 F(\eta_{2aa})}{\sqrt{1+2\eta_{aa}}-1}} \\ (3) & C = \sqrt{\frac{\tau_1 F(\eta_{2aa})}{\sqrt{1+2\eta_{aa}}-1}} \end{cases}$$

Ces expressions nous donnent pour une déformation ε_{2aa} (ou η_{2aa}) arbitrairement prescrite, la tension, la célérité et la vitesse particulière correspondantes. Nous savons que $f(\varepsilon_{aa})$ et $F(\eta_{aa})$ ont toujours même signe que la déformation. Aucune restriction n'apparaît donc dans le choix de celle-ci et nous pouvons la faire varier à volonté entre -1 et $+\infty$. Rappelons que la forme dans laquelle nous utilisons les relations d'HUGONIOU, implique que l'onde se propage dans le sens des abscisses positives.

Voyons ce que donnent ces expressions pour diverses formes explicites de la relation caractéristique de la phase élastique.

Loi linéaire. — Nous pouvons l'écrire d'après (III-2-23) et (III-2-32) :

$$(III-2-65) \quad \sigma_{aa} = \left(K + \frac{4}{3}G\right) \eta_{aa}$$

ou

$$(III-2-66) \quad \sigma_{aa} = \left(K + \frac{4}{3}G\right) \left(\varepsilon_{aa} + \frac{\varepsilon_{aa}^2}{2}\right).$$

Introduisant (65) dans (64,3) il vient :

$$(III-2-67) \quad C = \sqrt{\tau_1 \left(K + \frac{4}{3}G\right)} \sqrt{\frac{\eta_{2aa}}{\sqrt{1+2\eta_{2aa}}-1}}.$$

Cette expression est rigoureuse. Développant en série de η_{2aa} , il vient :

$$(III-2-68) \quad C = \sqrt{\tau_1 \left(K + \frac{4}{3}G\right)} \left(1 + \frac{\eta_{2aa}}{4} - \frac{5}{32} \eta_{2aa}^2 + \dots\right).$$

Aussi longtemps que les ondes sont d'assez faible amplitude pour que η_{2aa} soit négligeable devant l'unité, elles se propagent toutes avec la même célérité, qui est celle des ondes acoustiques. Nous retrouvons ce résultat en prenant (66) et (63,3). Il vient :

$$(III-2-69) \quad C = \sqrt{\tau_1 \left(K + \frac{4}{3}G\right)} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{2aa}}{2}}.$$

Cette expression est rigoureuse. Développant en série de ε_{2aa} , il vient :

$$(III-2-70) \quad C = \sqrt{\tau_1 \left(K + \frac{4}{3}G\right)} \left(1 + \frac{\varepsilon_{2aa}}{4} - \frac{1}{32} \varepsilon_{2aa}^2 + \dots\right).$$

Il suffit de tenir compte de $\eta_{2aa} = \frac{1}{2}[(1 + \varepsilon_{2aa}^2) - 1]$ pour voir que (III-2-68) et (III-2-70) sont identiques. Cette même expression montre d'ailleurs qu'il revient au même de négliger η_{2aa} ou ε_{2aa} devant l'unité.

A l'approximation des petites déformations, la célérité des ondes est donc indépendante de leur intensité. *Mais il n'en est plus ainsi, si nous étendons la loi élastique linéaire au-delà du domaine des petites déformations, comme le montrent (67) et (69).*

Loi quadratique. — Elle s'écrit d'après (32) et (34) :

$$(III-2-71) \quad \sigma_{aa} = \left(K + \frac{4}{3}G\right) \eta_{aa} + \delta \eta_{aa}^2$$

ou

$$(III-2-72) \quad \sigma_{aa} = \left(K + \frac{4}{3}G\right) \varepsilon_{aa} + \left[\frac{1}{2}\left(K + \frac{4}{3}G\right) + \delta\right] \varepsilon_{aa}^2 + \delta \varepsilon_{aa}^3 + \frac{1}{4} \varepsilon_{aa}^4$$

en désignant, pour simplifier par δ la somme des trois constantes C, E, F de (III-2-34).

Introduisant (71) dans (64,3) il vient :

$$(III-2-73) \quad C = \sqrt{\tau_1 \frac{\left(K + \frac{4}{3}G\right) \eta_{2aa} + \delta \eta_{2aa}^3}{\sqrt{1 + 2\eta_{2aa}} - 1}}.$$

On trouve un résultat équivalent, en introduisant (72) dans (63,3) :

$$(III-2-74) \quad C = \sqrt{\tau_1 \left[\left(K + \frac{4}{3}G\right) + \left[\frac{1}{2}\left(K + \frac{4}{3}G\right) + \delta\right] \varepsilon_{2aa} + \delta \left(\varepsilon_{2aa}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{2aa}^3\right) \right]}.$$

Passons alors à l'étude des profils d'onde. Pour obtenir le profil correspondant à un milieu amont prescrit, il suffit d'intégrer l'une ou l'autre des expressions (59) ou (60) entre les deux limites fixées par les déformations aval et amont, le paramètre C figurant dans ces expressions, étant une constante de valeur donnée par (63,3) ou (64,3).

Loi linéaire. — Utilisant (59) et (66), il vient :

$$(III-2-75) \quad dy = (\lambda + 2\mu) C \frac{d\varepsilon_{aa}}{\left(K + \frac{4}{3}G - \frac{C^2}{\tau_1}\right) \varepsilon_{aa} + \frac{1}{2}\left(K + \frac{4}{3}G\right) \varepsilon_{aa}^2}$$

qui donne l'intégrale

$$(III-2-76) \quad y = C^{\text{te}} + \frac{(\lambda + 2\mu) C}{K + \frac{4}{3}G - \frac{C^2}{\tau_1}} \ln \left| \frac{\frac{1}{2}\left(K + \frac{4}{3}G\right) \varepsilon_{aa}}{\frac{1}{2}\left(K + \frac{4}{3}G\right) \varepsilon_{aa} + \left(K + \frac{4}{3}G - \frac{C^2}{\tau_1}\right)} \right|$$

d'où, utilisant (69) :

$$(III-2-77) \quad y = C^{te} - 2(\lambda + 2\mu) \sqrt{\frac{\tau_1}{K + \frac{4}{3}G}} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_{2aa}}}{\varepsilon_{2aa}} \ln \left| \frac{\varepsilon_{aa}}{\varepsilon_{aa} - \varepsilon_{2aa}} \right|.$$

S'agissant d'une onde de raréfaction ($\varepsilon_{2aa} > 0$), on voit que cette expression est $+\infty$ pour $\varepsilon_{aa} = 0$ et $-\infty$ pour $\varepsilon_{aa} = \varepsilon_{2aa}$. D'où ce résultat :

L'épaisseur théorique de l'onde de raréfaction permanente est infinie.

S'agissant d'une onde de compression ($\varepsilon_{2aa} < 0$), les limites précédentes changent de signe, et le profil devient incompatible avec une onde de compression se propageant vers la droite. D'où ce résultat :

L'onde de compression permanente est interdite.

Nous lisons d'autre part sur (69) que l'onde de raréfaction a nécessairement une *célérité supersonique*. Cette même expression montre que l'onde de compression aurait une célérité subsonique; mais nous venons de voir qu'elle n'existe pas.

Si nous introduisons l'approximation des petites déformations, les expressions, que nous avons décrites, deviennent indéterminées. Résultat qui est en accord avec celui que nous connaissons déjà et d'après lequel *les ondes de profil quelconque, mais d'amplitude acoustique, se propagent sans déformation*.

Attachons une *épaisseur conventionnelle* au profil d'onde (77), en déterminant les abscisses des points d'intersection avec les droites $\varepsilon_{aa} = 0$ et $\varepsilon_{aa} = \varepsilon_{2aa}$, de la tangente au point d'inflexion du profil. Déterminons ce point à partir de (III-2-77). Il vient en posant

$$(III-2-78) \quad \begin{cases} a' = 0 \\ e' = (\lambda + 2\mu) C \\ b = \frac{1}{2} \left(K + \frac{4}{3} G \right) \\ c = K + \frac{4}{3} G - \frac{C^2}{\tau_1} \\ d = 0 \end{cases}$$

ce qui permet de donner à (77) la forme

$$(III-2-79) \quad y = C^{te} + \frac{e'}{c} \ln \left| \frac{b \varepsilon_{aa}}{b \varepsilon_{aa} + c} \right| = C^{te} - \frac{c'}{b \varepsilon_{2aa}} \ln \left| \frac{\varepsilon_{aa}}{\varepsilon_{aa} - \varepsilon_{2aa}} \right|$$

$$(III-2-80) \quad \frac{dy}{d\varepsilon_{aa}} = \frac{c'}{\varepsilon_{aa} (b \varepsilon_{aa} + c)}$$

$$(III-2-81) \quad \frac{d^2 y}{d\varepsilon_{aa}^2} = -e' \frac{2b \varepsilon_{aa} + c}{\varepsilon_{aa}^2 (b \varepsilon_{aa} + c)^2}.$$

La dérivée seconde s'annule donc au point

$$(III-2-82) \quad \begin{cases} \varepsilon_{aa} = -\frac{1}{2} \frac{c}{b} \\ y = 0 \end{cases}$$

La dérivée y prend la valeur :

$$(III-2-83) \quad \frac{dy}{d\varepsilon_{aa}} = -\frac{4be'}{c^2}$$

et l'équation de la tangente est :

$$(III-2-84) \quad y = -\frac{4be'}{c^2} \left(\varepsilon_{aa} + \frac{1}{2} \frac{c}{b} \right).$$

Elle coupe les droites indiquées aux points :

$$(III-2-85) \quad \begin{cases} y^+ = -\frac{2e'}{c} > 0 \\ y^- = +\frac{2e'}{c} < 0. \end{cases}$$

L'épaisseur conventionnelle du profil d'onde est donc :

$$(III-2-86) \quad \begin{cases} (1) & \Delta = -\frac{4e'}{c} \\ (2) & = \frac{4(\lambda + 2\mu)C}{C^2 - \left(K + \frac{4}{3}G\right)} \\ (3) & = 8(\lambda + 2\mu) \sqrt{\frac{\tau_1}{K + \frac{4}{3}G} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_{2aa}}}{\varepsilon_{2aa}}} \end{cases}$$

Elle est égale à 4 fois le coefficient du logarithme dans (77). On y lit immédiatement les résultats suivants très satisfaisants :

- 1° Quand l'intensité de l'onde devient infinie, son épaisseur s'annule;
- 2° Quand l'intensité de l'onde tend vers zéro, son épaisseur devient infinie;
- 3° Quand la résistance élastique croît, l'épaisseur diminue;
- 4° Quand la viscosité croît, l'épaisseur augmente proportionnellement;
- 5° Quand la densité croît, l'épaisseur augmente.

On notera en particulier que la viscosité intervient linéairement comme c'est le cas pour les fluides.

J'ai dressé ci-après un tableau à double entrée permettant de lire l'épaisseur de l'onde permanente dans une substance qui obéit au schéma de KELVIN-VOIGT et dont la loi élastique est linéaire en η_{aa} .

TABLEAU II

ÉPAISSEUR CONVENTIONNELLE D'UNE ONDE DE RARÉFACTION PERMANENTE
EN MILIEU VOIGTIEN DE LOI ÉLASTIQUE LINÉAIRE $\underline{\underline{\sigma}}(\eta)$
(unités cgs)

$$\chi = \frac{8(\lambda + 2\mu)}{\sqrt{K + \frac{4}{3}G}} = \frac{\varepsilon_{2uu}}{\sqrt{(1 + \varepsilon_{2aa})\tau_1}} \Delta$$

K + $\frac{4}{3}G$ $\lambda + 2\mu = \frac{4}{3}\mu$		Caoutchouc	Verre	Al	Cu	Acier
		10 ¹⁰	7,5 · 10 ¹¹	10 ¹²	2 · 10 ¹²	3 · 10 ¹²
États-limite du verre	10 ¹¹	8 · 10 ⁶	10 ⁶	8 · 10 ⁵	5 · 10 ⁵	5 · 10 ⁵
	10 ³	8 · 10 ⁻²	10 ⁻²	8 · 10 ⁻³	6 · 10 ⁻³	5 · 10 ⁻³
Cu liquide	5 · 10 ⁻²	4 · 10 ⁻⁶	5 · 10 ⁻⁷	4 · 10 ⁻⁷	3 · 10 ⁻⁷	2,5 · 10 ⁻⁷
Eau	2 · 10 ⁻²	1,6 · 10 ⁻⁶	2 · 10 ⁻⁷	1,6 · 10 ⁻⁷	1,4 · 10 ⁻⁷	10 ⁻⁷
Na liquide	8 · 10 ⁻³	6,4 · 10 ⁻⁷	8 · 10 ⁻⁸	6,4 · 10 ⁻⁸	5,6 · 10 ⁻⁸	4 · 10 ⁻⁸
Air	2 · 10 ⁻⁴	1,6 · 10 ⁻⁸	2 · 10 ⁻⁹	1,6 · 10 ⁻⁹	1,6 · 10 ⁻⁹	10 ⁻⁹

TABLEAU III
TABLE CORRESPONDANT AU CUIVRE
(unités cgs)

$$\tau_1 = \frac{1}{9}$$

$$K + \frac{4}{3}G = 2 \cdot 10^{12} \quad (\text{solide})$$

$$\frac{4}{3}\mu = \lambda + 2\mu = 5 \cdot 10^{-2} \quad (\text{liquide})$$

ε_{2aa}	Δ
10^{-4}	10^{-3}
10^{-2}	10^{-5}
10^{-1}	10^{-6}
$5 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-7}$
1	$1,4 \cdot 10^{-7}$
8	$3,75 \cdot 10^{-8}$
15	$2,5 \cdot 10^{-8}$
24	$2 \cdot 10^{-8}$

Notons pour terminer que les résultats qu'on vient d'établir peuvent être retrouvés de manière plus intuitive. La courbe (66) a l'allure suivante :

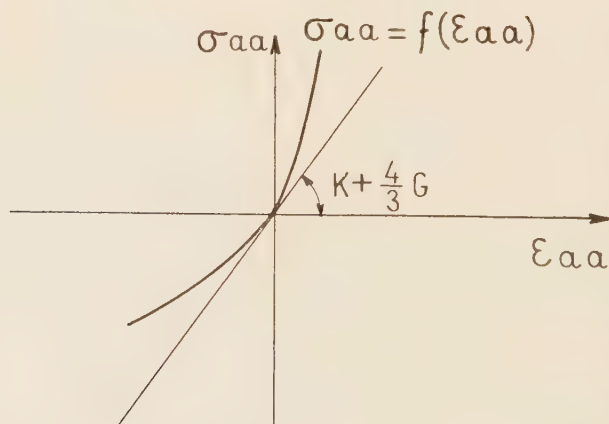


Fig. 6

D'après (69) la célérité d'une onde permanente d'état amont ε_{2aa} est mesurée par la pente de la droite reliant l'origine au point ε_{2aa} . Une raréfaction donne donc une célérité supersonique, augmentant avec ε_{2aa} . Une compression donne une célérité subsonique qui décroît, quand la compression augmente. La discussion du début de ce chapitre nous a appris d'autre part qu'avec l'allure de la courbe ci-dessus, les ondes de raréfaction doivent se raidir en cours de raréfaction, et conduire à des chocs de raréfaction stables (que la viscosité de la substance actuelle empêche de devenir d'épaisseur nulle), tandis que les ondes de compression doivent s'étaler, les chocs de compression étant instables et ne pouvant être maintenus. Tous ces résultats concordent avec ceux établis par des calculs plus abstraits. Leur différence avec ceux déduits en début de chapitre de la courbe de la figure 4 provient évidemment de ce que la courbe de la figure 6 a une autre allure

Loi quadratique. — Commençons par étudier l'allure de la loi élastique quadratique sous sa forme (71) :

$$(III-2-71) \quad \sigma_{aa} = \left(K + \frac{4}{3} G \right) \eta_{aa} + \delta \eta_{aa}^2.$$

Selon le signe de δ , nous avons l'une ou l'autre des deux paraboles suivantes :

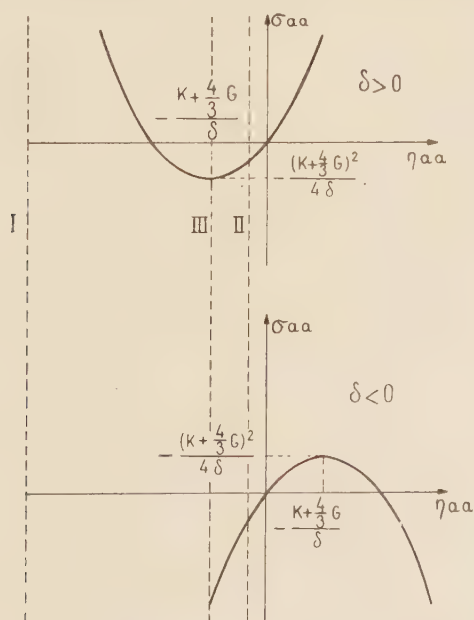


Fig. 7

Si δ est en valeur absolue, très supérieure à $K + \frac{4}{3} G$, la droite $\eta_{aa} = -\frac{1}{2}$ (limite de compressibilité) a la position I. Si δ est, en valeur absolue, très

inférieur à $K + \frac{4}{3}G$, cette droite a la position II. Le cas limite $\delta = K + \frac{4}{3}G$ donne enfin la position III.

Il est intéressant d'étudier la loi élastique quadratique sous sa forme (72), qui utilise le paramètre de déformation ε_{aa} , et qui permet une comparaison avec la courbe de la figure 3, introduite en début de chapitre pour caractériser un solide non-dissipatif. Écrivons donc :

$$(III-2-87) \quad \sigma_{aa} = \frac{\delta}{4} \varepsilon_{aa}^4 + \delta \varepsilon_{aa}^3 + \left(\frac{b}{2} + \delta\right) \varepsilon_{aa}^2 + b \varepsilon_{aa}$$

en posant

$$(III-2-88) \quad b = K + \frac{4}{3}G.$$

Pour être une expression pleinement satisfaisante du comportement d'un solide, cette fonction devrait tendre vers $-\infty$ quand ε_{aa} tend vers -1 . C'est évidemment impossible. Du côté des déformations positives, d'autre part, il n'existe pas de condition analogue, ce domaine s'arrêtant à la déformation de rupture.

Faisons l'étude de l'expression (87).

Racines. — On met en évidence les racines indépendantes de la valeur des constantes : $\varepsilon_{aa}^I = 0$ et $\varepsilon_{aa}^{II} = -2$. Le second membre de (87) peut donc s'écrire encore

$$(III-2-89) \quad \sigma_{aa} = \varepsilon_{aa} (\varepsilon_{aa} + 2) f(\varepsilon_{aa})$$

où

$$(III-2-90) \quad f(\varepsilon_{aa}) = \frac{\delta}{4} \varepsilon_{aa}^2 + \frac{\delta}{2} \varepsilon_{aa} + \frac{b}{2}.$$

Les deux autres racines sont donc :

$$(III-2-91) \quad \begin{cases} \varepsilon_{aa}^{III} = -1 + \sqrt{1 - \frac{2b}{\delta}} \\ \varepsilon_{aa}^{IV} = -1 - \sqrt{1 - \frac{2b}{\delta}} \end{cases}$$

Elles sont *complexes conjuguées* pour

$$(III-2-92) \quad \frac{b}{\delta} > \frac{1}{2}$$

(réelles) pour

$$(III-2-93) \quad \frac{b}{\delta} \leq \frac{1}{2}$$

b étant, d'après sa signification (88), toujours positif et δ pouvant être de signe quelconque. Des cas-limites sont :

TABLEAU IV

δ	-0	$-\infty$	$+\infty$	$+2b$
$\frac{b}{\delta}$	$-\infty$	-0	$+0$	$\frac{1}{2}$
ε_{aa}^{III}	$+\infty$	$+0$	$+0$	-1
ε_{aa}^{IV}	$-\infty$	-2	-2	-1

On voit, en particulier que, pour δ négatif, ε_{aa}^{III} est positive et ε_{aa}^{IV} est négative tandis que pour δ positif et $\geq 2b$ les deux racines sont négatives.

Extrema. — En annulant la dérivée première de (87), je trouve :

$$(III-2-94) \quad \delta \varepsilon_{aa}^3 + 3 \delta \varepsilon_{aa}^2 + (b + 2\delta) \varepsilon_{aa} + b = 0.$$

La fonction (87) admet donc l'extremum de coordonnées fixes :

$$(III-2-95) \quad \begin{cases} \varepsilon_{aa} = -1 \\ \sigma_{aa} = \frac{\delta}{4} - \frac{b}{2} \end{cases}$$

Son ordonnée est :

$$(III-2-96) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{positive pour} & \frac{b}{\delta} < \frac{1}{2} \\ \text{nulle pour} & \frac{b}{\delta} = \frac{1}{2} \\ \text{négative pour} & \frac{b}{\delta} > \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

La localisation exacte des autres extrema n'est pas nécessaire.

Points d'inflexion. — En annulant les dérivées secondes de (87), le trouve les abscisses des points d'inflexion éventuels :

$$(III-2-97) \quad 3 \delta \varepsilon_{aa}^2 + \sigma \delta \varepsilon_{aa} + b + 2\delta = 0$$

d'où

$$(III-2-98) \quad \begin{cases} \varepsilon_{a,a}^{I,I} = -1 + \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{b}{\delta}\right)} \\ \varepsilon_{a,a}^{I,II} = -1 - \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{b}{\delta}\right)} \end{cases}$$

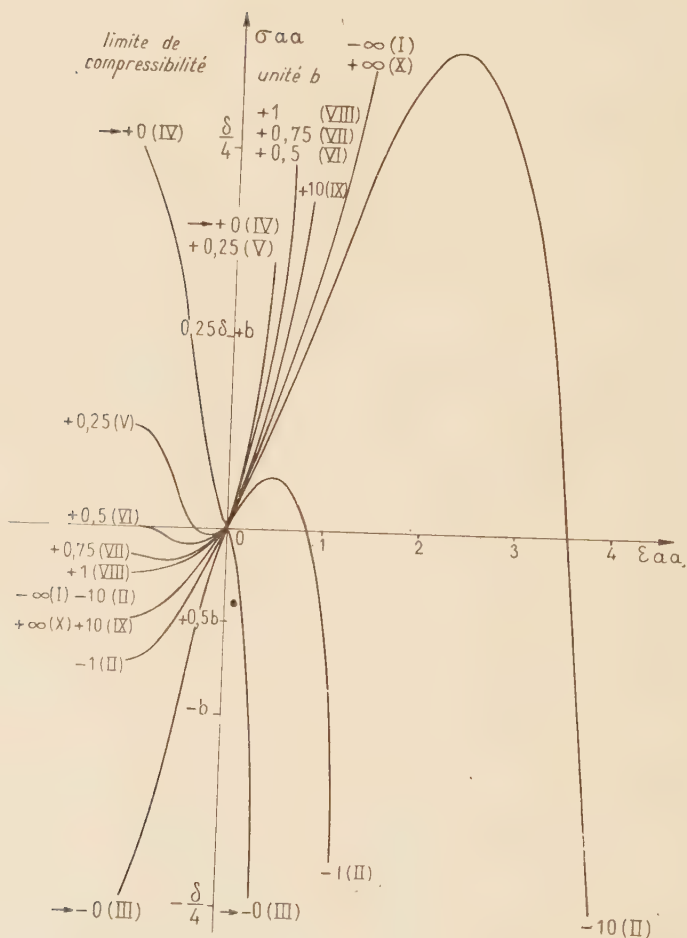


Fig. 8

Les chiffres arabes portés aux extrémités des courbes donnent le rapport $\frac{b}{\delta}$ et les chiffres romains désignent la colonne correspondante du Tableau 7. L'ordonnée est mesurée en unités b à l'exception des courbes III et IV qui sont rapportées à l'unité δ .

$\frac{b}{\delta}$	$-\infty$	$-\infty < \frac{b}{\delta} < 0$	$\rightarrow -0$	$\rightarrow +0$	$0 < \frac{b}{\delta} < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \frac{b}{\delta} < 1$	1	$1 < \frac{b}{\delta} < +\infty$	$+\infty$
Racines	4 racines réelles									
	2 racines réelles et 2 complexes conjuguées									
	0 -2 +∞ -∞	0 -2 >0 <-2	0 -2 →0 →-2	0 -2 →0 →-2	0 -2 $-1 < \varepsilon_{aa}^{III} < 0$ $-2 < \varepsilon_{aa}^{III} < -1$	0 -2 -1 -1	0 -2 imag. imag.	0 -2 imag. imag.	0 -2 imag. imag.	0 -2 imag. imag.
Ordonnée de l'extrémum d'abscisse -1	toutes les deux négatives									
	positive									
	nulle									
Abscisses des points d'inflexion	toutes les deux négatives									
	confondues en -1 minimum									
	toutes les deux complexes									
I	positive et négative	$+\infty$	> -1	$\rightarrow \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\rightarrow \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$	$> \varepsilon_{aa}^{II}$	> -1
		-1	< -1	$\rightarrow \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\rightarrow \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$	$< \varepsilon_{aa}^{II}$	< -1
II										
III										
IV										
V										
VI										
VII										
VIII										
IX										
X										

Ces abscisses sont :

$$(III-2-99) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{réelles et distinctes} & \text{pour } -\infty \leq \frac{b}{\delta} < 1 \\ \text{réelles, confondues et négatives} & \text{pour } \frac{b}{\delta} = 1 \\ \text{complexes conjuguées} & \text{pour } \frac{b}{\delta} > 1 \end{array} \right.$$

J'ai groupé l'ensemble de ces résultats dans le tableau V, la constante b étant toujours supposée positive, et j'ai esquissé l'allure des courbes correspondantes pour quelques valeurs du rapport $\frac{b}{\delta}$ (fig. 8). En reprenant pour ces courbes la discussion faite à propos de la figure 3 on voit que :

Pour δ positif elles indiquent toutes en compression un comportement plastique au sens de VON KARMAN-TAYLOR-RAKHMATULIN; le domaine permis (limité par le minimum de la courbe) diminuant progressivement à mesure que δ augmente de 0 à $+\infty$ (courbes X, IX, XIII, VII, VI, V, IV). En raréfaction toutes ces courbes sont d'autre part à concavité tournée vers l'ordonnée. Les courbes de compression s'étalent donc, tandis que les courbes de raréfaction se raidissent et évoluent vers un profil de choc.

Pour δ négatif, (courbes I, II, III), le comportement est encore plastique en compression (étalement des ondes), aussi longtemps que δ obéit en valeur algébrique à la double inégalité

$$(III-2-100) \quad 0 > \delta > -\frac{b}{2}$$

[courbes I et II ($\frac{b}{\delta} = -10$)], tandis qu'en raréfaction il y a raidissement de profil. Au-delà [courbes II ($\frac{b}{\delta} = -1$) et III] la branche de compression est à concavité tournée vers l'ordonnée jusqu'au point d'inflexion :

$$(III-2-98,1) \quad \varepsilon_{aa}^{i1} = -1 + \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{b}{\delta}\right)}$$

et couvre un domaine d'autant plus grand que $|\delta|$ est plus grand. Dans ce cas il y aurait donc formation d'un choc de compression frontal suivi d'une onde qui s'étale. Les ondes de raréfaction d'autre part devraient s'étaler.

Nos travaux expérimentaux nous ont conduit à nous intéresser plus particulièrement aux chocs de compression, et afin de ne pas trop allonger ce chapitre, nous ne discuterons que le cas dans lequel de tels chocs de compression sont possibles.

Nous venons de voir que cela exige que δ soit négatif et encore tel que

$$(III-2-101) \quad \delta < -\frac{b}{2},$$

$= (K + \frac{4}{3}G)$ étant positif. La courbe $[-1 \text{ (II)}]$ de la figure 8 correspond à

ce cas. Nous l'avons reproduite ci-dessous traçant en trait renforcé la branche ayant un sens physique. Ainsi que nous l'avons déjà dit, on voit que les ondes de raréfaction permanentes, et en particulier les chocs de raréfaction, ne peuvent exister dans les conditions présentes. La célérité des ondes permanentes étant donnée par (63), et donc directement reliée à la pente de la droite reliant l'origine au point amont ε_{2aa} , nous voyons aussi que :

Les ondes de compression permanentes auront une célérité supersonique.

Passons à la détermination de la structure de ces ondes. En combinant (59) et (72), nous obtenons :

$$(III-2-102) \quad dy = (\lambda + 2\mu) C \frac{dz_{aa}}{\frac{\delta}{4} \varepsilon_{aa}^4 + \delta \varepsilon_{aa}^3 + \left(\frac{b}{2} + \delta\right) \varepsilon_{aa}^2 + \left(b - \frac{C^2}{\tau_1}\right) \varepsilon_{aa}}$$

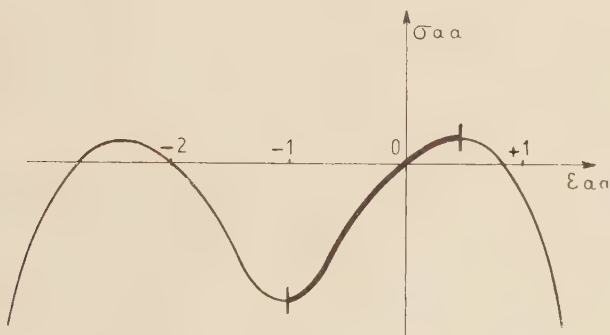


Fig. 9

La forme de l'intégrale dépend de la nature des racines du dénominateur de cette expression. L'étude quantitative de ces racines se fait aisément à partir de la fonction (72) puisqu'il suffit d'ajouter en chaque abscisse à l'ordonnée de (72) la valeur $-\frac{C^2}{\tau_1} \varepsilon_{aa}$ pour avoir l'ordonnée correspondante du dénominateur de (102).

Nous nous intéressons au cas $\delta < -\frac{b}{2}$ (fig. 9). Les zéros du dénominateur de (102) sont les points d'intersection de la courbe de la figure 9 avec la droite $\sigma_{aa} = \frac{C^2}{\tau_1} \varepsilon_{aa}$ (droite représentative de la seconde relation d'Hugoniot). Faisons croître C à partir de zéro. Cette droite, initialement confondue avec l'abscisse, balaie le plan dans le sens trigonométrique. Les racines, qui ont au début ($C=0$) les valeurs $\varepsilon_{aa}^{III}, \varepsilon_{aa}^I=0, \varepsilon_{aa}^{II}=-2, \varepsilon_{aa}^{IV}$, en allant de droite à gauche sur l'abscisse, subissent les variations suivantes à mesure que C augmente :

ε_{aa}^{III} diminue en valeur algébrique;

ε_{aa}^I reste fixe;

ε_{aa}^{II} augmente en valeur algébrique;

ε_{aa}^{IV} diminue en valeur algébrique.

Lorsque la droite devient tangente à la courbe à l'origine, les racines ε_{aa}^{III} et ε_{aa}^I sont confondues en ce point. Nous avons alors

$$(III-2-103) \quad C = \sqrt{\tau_1 b} = \sqrt{\tau_1 \left(K + \frac{4}{3} G \right)}.$$

Ce cas correspond donc aux ondes acoustiques. Les deux racines confondues à l'origine caractérisent les déformations des milieux aval et amont (ondes d'intensité infinitésimales).

Pénétrons dans le domaine des ondes supersoniques. La racine ε_{aa}^{III} devient négative, le point d'intersection de la droite avec la courbe décrivant la branche de compression de cette dernière. C'est cette racine qui donne la déformation du milieu amont (raison pour laquelle nous la désignerons dans la suite par ε_{2aa}). Pour une certaine célérité, ce point atteint le point d'inflexion de la courbe, le point représentatif de la racine ε_{aa}^{II} faisant de même. Au-delà, ces deux racines deviennent complexes; le problème cesse d'avoir une signification physique.

En résumé nous pouvons donc dire que les ondes de compression permanentes peuvent exister dans le domaine de déformation $0, -1 + \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{b}{\delta} \right)}$ et qu'elles se déplacent avec une célérité qui augmente avec la déformation à partir de sa valeur sonique à la valeur maxima donnée par (74) en donnant à ε_{2aa} la valeur de la déformation au point d'inflexion.

Dans tout ce domaine les quatre racines du dénominateur de (102) sont réelles et distinctes (en excluant les frontières du domaine). L'intégration de (102) conduit alors à la solution :

$$(III-2-104) \quad y = \frac{4(\lambda + 2\mu)}{\delta} C \ln \left| \varepsilon_{aa}^A (\varepsilon_{aa} - \varepsilon_{2aa})^n (\varepsilon_{aa} - \varepsilon_{3aa})^c (\varepsilon_{aa} - \varepsilon_{4aa})^d \right|.$$

Dans cette expression, nous avons :

$$(III-2-105) \quad \begin{cases} \varepsilon_{1aa} = \varepsilon_{aa}^I \\ \varepsilon_{2aa} = \varepsilon_{aa}^{III} \\ \varepsilon_{3aa} = \varepsilon_{aa}^{II} \\ \varepsilon_{4aa} = \varepsilon_{aa}^{IV} \end{cases}$$

et

$$(III-2-106) \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{\varepsilon_{2aa} \varepsilon_{3aa} \varepsilon_{4aa}} \\ B = \frac{1}{\varepsilon_{2aa} (\varepsilon_{2aa} - \varepsilon_{3aa}) (\varepsilon_{2aa} - \varepsilon_{4aa})} \\ C = \frac{1}{\varepsilon_{3aa} (\varepsilon_{3aa} - \varepsilon_{2aa}) (\varepsilon_{3aa} - \varepsilon_{4aa})} \\ D = \frac{1}{\varepsilon_{4aa} (\varepsilon_{4aa} - \varepsilon_{2aa}) (\varepsilon_{4aa} - \varepsilon_{3aa})} \end{cases}$$

D'après ce que nous savons du signe de ces racines, nous voyons donc que :

A et C sont positifs;

B et D sont négatifs.

($\lambda + 2\mu$) et la célérité C étant positifs et δ étant négatif, nous arrivons alors au résultat suivant :

Lorsque ε_{aa} varie de 0 à ε_{2aa} (variation de la déformation au passage de l'onde), γ varie de $+\infty$ à $-\infty$.

Le profil de l'onde est donc bien celui d'une onde de compression qui se propage dans le sens des abscisses positives; mais *l'épaisseur théorique de cette onde est infinie*.

On pourrait, comme précédemment, définir une *épaisseur conventionnelle* de l'onde, en déterminant les points d'intersection avec les droites $\varepsilon_{aa} = 0$ et $\varepsilon_{aa} = \varepsilon_{2aa}$ de la tangente au point d'inflexion du profil (104). Mais sans effectuer ce calcul — qui de toute manière ne présente d'intérêt que si l'on a donné des valeurs numériques précises aux constantes élastiques b et δ — nous voyons sur (104) que :

L'épaisseur de l'onde augmente proportionnellement à la viscosité de la substance;

L'épaisseur de l'onde diminue quand l'élasticité de la substance (constante δ) augmente.

D'un point de vue qualitatif ces résultats sont analogues à ceux que nous avons établi pour la loi élastique linéaire en η_{aa} . Mais nous avons trouvé alors que les ondes de raréfaction permanentes étaient seules possibles, *alors que l'emploi d'une loi élastique quadratique en η_{aa} permet d'avoir, selon le choix des constantes élastiques d'ordre 1 ($b - K + \frac{4}{3}G$) et d'ordre 2 (δ), ou bien des ondes permanentes de compression, ou bien des ondes permanentes de raréfaction (mais toujours les ondes d'une espèce à l'exclusion de celles d'espèce contraire)*. Nous venons de traiter explicitement le cas des ondes de compression permanentes correspondant à un choix de δ en conformité avec (101).

D. LA SUBSTANCE DE MAXWELL. — Elle peut être schématisée par le modèle ci-contre (fig. 10) et conduit à ce que nous avons appelé la loi de composition en série. Il n'y a qu'un état de tension pour les deux phases et les déformations qui en résultent s'ajoutent pour donner la déformation totale. Mais, pour caractériser la déformation, nous pouvons utiliser ε_{aa} ou η_{aa} , soit

$$(III-2-107) \quad \varepsilon_{aa} = \varepsilon_{aa}^E + \varepsilon_{aa}^\mu$$

ou

$$(III-2-108) \quad \eta_{aa} = \eta_{aa}^E + \eta_{aa}^\mu.$$

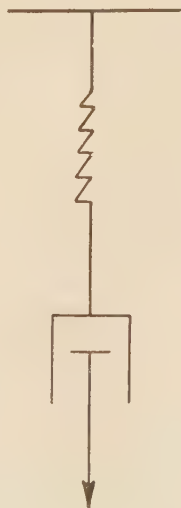


Fig. 10

Suivant le choix adopté, le résultat n'est pas le même, puisque la relation.

$$\eta_{aa} = \frac{1}{2} [(1 + \varepsilon_{aa})^2 - 1]$$

montre que l'additivité des ε_{aa} ne correspond pas à l'additivité des η_{aa} .
Envisageons un segment de substance *parallèle* à l'axe O_a .

Il est avant déformation

$$\overline{da} = (da, 0, 0)$$

et après déformation

$$\overline{dx} = [(1 + \varepsilon_{aa}) da, 0, 0]$$

d'où nous tirons

$$\frac{dx - \overline{da}}{\overline{da}} = \varepsilon_{aa}$$

$$\frac{\overline{dx}^2 - \overline{da}^2}{\overline{da}^2} = [(1 + \varepsilon_{aa})^2 - 1] = 2\eta_{aa}.$$

Ainsi que nous le savions déjà, l'allongement relatif d'un segment fait donc intervenir ε_{aa} , tandis que l'allongement relatif de son carré fait intervenir η_{aa} de manière simple.

Envisageons les deux lois d'addition et écrivons provisoirement la relation caractéristique de la phase élastique sous la forme :

$$(III-2-109) \quad \varepsilon_{aa}^E = g(\sigma_{aa})$$

d'où univoquement

$$(III-2-110) \quad \eta_{aa}^E = G(\sigma_{aa}).$$

La relation caractéristique de la phase visqueuse s'écrit :

$$(III-2-111) \quad \frac{\Delta \varepsilon_{aa}}{\Delta t} = \frac{1 + \varepsilon_{aa}}{\lambda + 2\mu} \sigma_{aa}$$

ou

$$(III-2-112) \quad \frac{\Delta \eta_{aa}}{\Delta t} = \frac{1 + 2\eta_{aa}}{\lambda + 2\mu} \sigma_{aa}.$$

La loi d'addition (107) donne alors l'équation d'état dynamique

$$(III-2-113) \quad \frac{\Delta \varepsilon_{aa}}{\Delta t} = \frac{dg}{d\sigma_{aa}} \frac{\Delta \sigma_{aa}}{\Delta t} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} (1 + \varepsilon_{aa} - g) \sigma_{aa}.$$

La loi d'addition (108) donne l'équation d'état dynamique

$$(III-2-114) \quad \frac{\Delta \eta_{aa}}{\Delta t} = \frac{dG}{d\sigma_{aa}} \frac{\Delta \sigma_{aa}}{\Delta t} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} (1 + 2\eta_{aa} - 2G) \sigma_{aa}.$$

De (113) et (114) nous déduisons les équations d'état statiques en annulant les dérivées. Il vient ainsi :

$$(III-2-115) \quad (1 + \varepsilon_{aa} - g) \sigma_{aa} = 0$$

et

$$(III-2-116) \quad (1 + 2\eta_{aa} - 2G) \sigma_{aa} = 0.$$

Une première solution est donnée par $\sigma_{aa} = 0$. Il lui correspond une déformation partielle élastique nulle. $\varepsilon_{aa}^E = 0$ (ou $\eta_{aa}^E = 0$), la déformation partielle visqueuse correspondante pouvant être quelconque. L'équation d'état statique correspondante est donc représentée par l'abscisse $\sigma_{aa} = 0$ et la seconde relation d'Hugoniot

$$(III-2-117) \quad C = \sqrt{\tau_1 \frac{\sigma_{2aa}}{\varepsilon_{2aa}}}$$

donne une célérité d'onde permanente nulle. *Un tel état d'équilibre ne saurait donc être atteint par onde permanente.* (Nous savons que ces états apparaissent comme conséquence d'un processus de relaxation au cours duquel les déformations élastiques présentes dans la substance sont reportées sur la phase visqueuse).

Une autre solution de (115) est donnée par

$$(III-2-118) \quad \varepsilon_{aa} = g - 1$$

ou, en vertu de (109) :

$$(III-2-119) \quad \varepsilon_{aa}^\mu = -1.$$

Cette solution correspond donc à une compression visqueuse infinie. Comme la compression totale ne saurait être plus grande, la déformation élastique correspondante est forcément une raréfaction (qui à la limite peut être nulle). Cette déformation élastique est d'autre part reliée à la tension par :

$$(III-2-109) \quad \varepsilon_{aa}^E = g(\sigma_{aa}),$$

relation dont les diverses solutions « quadratiques » ont été représentées sur la figure 8. Nous obtenons les solutions (115) en déplaçant ces courbes en bloc de la quantité 1 vers la gauche. Elles passent toutes par le point $\sigma_{aa} = 0$, $\varepsilon_{aa} = -1$ et le cas actuellement envisagé donne donc une déformation élastique nulle, c'est-à-dire une compression purement visqueuse d'intensité infinie. De plus, à moins de choisir de manière appropriée les constantes élastiques b et δ , ces courbes ne passent pas par l'origine. En général l'état d'équilibre (III-2-118) est donc incompatible avec l'état naturel non-déformé de la substance. Supposons alors qu'un choix approprié de b et δ fasse passer la courbe par l'origine. Comme la célérité de l'onde permanente reliant les deux états extrêmes est mesurée par la pente joignant les deux points correspondants, nous voyons que cette célérité est nulle.

En conclusion nous devons dire que *les seules ondes permanentes permises dans la substance de Maxwell sont les ondes acoustiques (ondes d'intensité infiniment petite).*

§ 4. Les solides élasto-plastiques

Ces corps sont composés de deux ou de plusieurs phases élastiques et plastiques. Les propriétés d'une phase élastique s'expriment par les relations que nous venons d'étudier à propos des solides visco-élastiques. (relations (III-2-6) ou (III-2-7)). Reste la phase plastique.

Cette dernière est habituellement caractérisée par une relation de la forme suivante

$$(III-3-1) \quad \underline{\underline{D}} = \lambda \left[\underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{I}}_1^{\underline{\underline{\sigma}}} \underline{\underline{E}}_3 \right]$$

qui résulte des théories de la plasticité les plus générales (A 21) en adoptant comme condition d'écoulement plastique celle de VON MISES (H 118).

$\underline{\underline{D}}$ est le tenseur (I-6-10), $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseurs des tensions, $\underline{\underline{I}}_1^{\underline{\underline{\sigma}}} = \sigma_{aa} + \sigma_{bb} + \sigma_{cc}$, son premier invariant, $\underline{\underline{E}}$ le tenseur-unité et λ une grandeur que nous préciserons ultérieurement.

Une phase visqueuse est, par contre, définie par :

$$(III-3-2) \quad \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{D}} + \lambda \operatorname{div}_M \vec{u} \underline{\underline{E}}_3$$

(ne pas confondre les coefficients λ figurant dans (III-3-1) et (III-3-2). Ils n'ont rien à voir l'un avec l'autre). En inversant (III-3-2), il vient :

$$(III-3-3) \quad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2\mu} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \underline{\underline{I}}_1^{\underline{\underline{\sigma}}} \underline{\underline{E}}_3.$$

On peut donc dire que, dans la phase visqueuse, le tenseur des tensions est univoquement déterminé par le tenseur du gradient des vitesses particulières $\underline{\underline{D}}$, et que ce dernier est univoquement déterminé par le tenseur des tensions.

Mais dans le cas des fluides on admet la relation $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ entre les deux coefficients de viscosité. Cette relation exprime qu'une variation de volume ne fait pas apparaître de tensions visqueuses, quelle que soit la rapidité avec laquelle la tranformation se fait (volume viscosity nulle). (III-3-2) devient alors

$$(III-3-4) \quad \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \left[\underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} \operatorname{div}_M \vec{u} \underline{\underline{E}}_3 \right]$$

et, sous cette forme particulière, ne peut plus être résolue par rapport à $\underline{\underline{D}}$.

En substituant $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ dans (III-3-2), on voit d'ailleurs que les composantes principales de $\underline{D}$ deviennent infinies, à moins de prendre $\underline{I}_1^\sigma = 0$. Ce qui montre encore que la phase visqueuse soumise à la condition supplémentaire $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ n'admet que des tensions de cisaillement.

Ces remarques font apparaître la raison profonde pour laquelle, dans l'étude des fluides, on ne peut utiliser que la loi de composition de VOIGT entre la phase visqueuse et la phase statique. Cette loi compose en effet les tensions partielles des deux phases pour un état de déformation (et vitesse de déformation) donné et *supposé identique* dans les deux phases. Ce qui a toujours un sens, comme nous venons de voir. La loi de composition de MAXWELL par contre part d'un état de tension, *supposé identique* dans les deux phases, et ajoute les déformations partielles résultantes. Or nous venons de voir que la phase visqueuse d'un fluide, soumis à la condition de résistance nulle aux changements de volume ($\lambda = -\frac{2}{3}\mu$), ne peut admettre des tensions normales non nulles. Comme celles-ci apparaissent forcément dans la phase statique dès que le volume change, l'hypothèse d'un même état de tension dans les deux phases ne peut être faite et la loi de composition de MAXWELL ne s'applique pas.

Le cas des solides visco-élastiques est différent. L'hypothèse $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ n'est pas faite et les tensions normales non-nulles sont possibles dans la phase visqueuse. Par conséquent les lois de composition de VOIGT et de MAXWELL s'appliquent toutes les deux.

Qu'en est-il des substances élasto-plastiques? La relation caractéristique de la phase plastique est (III-3-1). On voit qu'elle est de même forme que (III-3-2), les tenseurs σ et $\underline{D}$ étant permutés. Une telle relation implique l'incompressibilité de la phase qu'elle caractérise. Elle ne peut être résolue par rapport à σ et c'est la raison pour laquelle les corps élasto-plastiques suivant la loi de composition de MAXWELL à l'exclusion de celle de VOIGT.

Dans l'étude des problèmes particuliers par *tranches planes* qui nous intéresse, l'emploi d'une phase plastique, caractérisée par (III-3-1), conduit à d'autres difficultés. Dans l'étude des corps visco-élastiques, nous avons raisonné de la manière suivante : *chaque phase subit séparément une déformation par tranches planes*. (C'est un des aspects de l'hypothèse de l'indépendance des phases.) D'où, pour chaque phase, la relation caractéristique propre à cette déformation et, par composition suivant le schéma de VOIGT ou de MAXWELL, l'équation d'état dynamique du corps composé.

Dans le cas actuel l'extension de l'hypothèse de l'indépendance des phases à la déformation qu'elles subissent est impossible. La phase plastique ne peut être le siège d'une déformation par tranches planes puisqu'une telle déformation entraîne forcément une variation de volume et que la phase plastique est incompressible. Si un état de déformation par tranches planes se propage dans une substance élasto-plastique, ce ne peut donc être que par compen-

sation mutuelle des déformations radiales partielles dans les phases élastique et plastique ⁽¹⁾.

Donnons à la relation caractéristique de la phase élastique la forme

$$(III-2-7) \quad \underline{\underline{\eta^E}} = C_0 \underline{\underline{E_3}} + C_1 \underline{\underline{\sigma}} + C_2 \underline{\underline{\sigma \sigma}}$$

et récrivons celle de la phase plastique

$$(III-3-1) \quad \underline{\underline{D^\lambda}} = \lambda \left[\underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{I_1^\sigma}} \underline{\underline{E_3}} \right].$$

Appliquons la loi de composition de MAXWELL à la déformation $\underline{\underline{\eta}}$:

$$(III-3-5) \quad \frac{\Delta \underline{\underline{\eta}}}{\Delta t} = \frac{\Delta \underline{\underline{\eta^E}}}{\Delta t} + \frac{\Delta \underline{\underline{\eta^\lambda}}}{\Delta t}.$$

Le repère des directions principales, qui est le même pour les deux phases, est donné par la direction de propagation de l'onde et deux directions radiales quelconques, mutuellement perpendiculaires. Appliquant (I-6-17) à la phase plastique, nous trouvons dans ce repère :

$$(III-3-6) \quad \frac{\Delta \underline{\underline{\eta^\lambda}}}{\Delta t} = \underline{\underline{P^\lambda}} \underline{\underline{D^\lambda}} \underline{\underline{P^{\lambda \times}}}.$$

Mais, dans notre problème, toutes les matrices de cette expression sont diagonales. Tenant compte encore de (I-3-12) pour $\underline{\underline{\eta^\lambda}}$:

$$\underline{\underline{\eta^\lambda}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{P^\lambda}} \underline{\underline{P^{\lambda \times}}} - \underline{\underline{E_3}} \right]$$

il vient :

$$(III-3-7) \quad \frac{\Delta \underline{\underline{\eta^\lambda}}}{\Delta t} = (\underline{\underline{E_3}} + 2 \underline{\underline{\eta^\lambda}}) \underline{\underline{D^\lambda}}$$

et l'équation d'état dynamique de la substance élasto-plastique peut s'écrire :

$$(III-3-8) \quad \frac{\Delta \underline{\underline{\eta}}}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} [C_0 \underline{\underline{E_3}} + C_1 \underline{\underline{\sigma}} + C_2 \underline{\underline{\sigma \sigma}}] + \lambda [\underline{\underline{E_3}} + 2 \underline{\underline{\eta^\lambda}}] \left[\underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{I_1^\sigma}} \underline{\underline{E_3}} \right]$$

où il y a lieu encore de poser $\underline{\underline{\eta^\lambda}} = \underline{\underline{\eta}} - \underline{\underline{\eta^E}}$, $\underline{\underline{\eta^E}}$ étant donné par (III-2-7).

Cette expression conduit aisément aux lois de Prandl-Reuss classiques. Faisons en effet l'hypothèse des petites déformations; $\underline{\underline{\eta^\lambda}}$ devient négligeable

(1) Il va sans dire que ce point de vue peut être adopté dans la composition en série des phases visqueuses et élastiques. Cette étude, que nous n'avons pas abordée dans le présent mémoire, mérite d'être faite.

devant l'unité et $\frac{\Delta \eta}{\Delta t}$ devient :

$$\frac{\Delta \eta}{\Delta t} = \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} = \dot{\varepsilon}$$

dans l'écriture habituelle.

La relation caractéristique de la phase élastique, se réduisant à la loi de HOOKE, doit s'écrire :

$$\varepsilon = \frac{1}{2G} \sigma + \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{6G} \right) I_1 E_3$$

et (III-3-8) devient :

$$(III-3-9) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1}{2G} \dot{\sigma} + \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{2G} \right) \dot{\sigma} E_3 + \lambda S$$

en posant comme d'habitude :

$$(III-3-10) \quad \begin{cases} \sigma = \frac{1}{3} I_1 \\ S = \sigma - \sigma E_3 \end{cases}$$

On reconnaît dans (III-3-9) les lois de PRANDL-REUSS qui, sous cette forme, s'appliquent dans n'importe quel repère orthonormé ⁽¹⁾.

Revenons maintenant à l'expression générale (III-3-8), et explicitons-la dans le repère des directions principales de la déformation par tranches planes. Il vient :

$$(III-3-11) \quad \begin{aligned} & \frac{\Delta \eta_{aa}}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} (C_0 + C_1 \sigma_{aa} + C_2 \sigma_{aa}^2) \\ & + \lambda [1 + 2\eta_{aa} - 2(C_0 + C_1 \sigma_{aa} + C_2 \sigma_{aa}^2)] \left[\sigma_{aa} - \frac{1}{3} (\sigma_{aa} + \sigma_{bb} + \sigma_{cc}) \right] \\ & \frac{\Delta \eta_{bb}}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} (C_0 + C_1 \sigma_{bb} + C_2 \sigma_{bb}^2) \\ & + \lambda [1 + 2\eta_{bb} - 2(C_0 + C_1 \sigma_{bb} + C_2 \sigma_{bb}^2)] \left[\sigma_{bb} - \frac{1}{3} (\sigma_{aa} + \sigma_{bb} + \sigma_{cc}) \right] = 0 \\ & \frac{\Delta \eta_{cc}}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} (C_0 + C_1 \sigma_{cc} + C_2 \sigma_{cc}^2) \\ & + \lambda [1 + 2\eta_{cc} - 2(C_0 + C_1 \sigma_{cc} + C_2 \sigma_{cc}^2)] \left[\sigma_{cc} - \frac{1}{3} (\sigma_{aa} + \sigma_{bb} + \sigma_{cc}) \right] = 0 \end{aligned}$$

Comme, par symétrie, les deux tensions radiales sont toujours égales, les deux dernières des relations (III-2-183) peuvent être réduites à une seule et nous restons en présence de deux relations entre η_{aa} , σ_{aa} , σ_{bb} , leurs

(1) L'expression (III-3-8) paraît donc pouvoir s'appliquer aussi dans n'importe quel repère orthonormé. C'est une conséquence de l'isotropie de la substance.

dérivées premières par rapport au temps (dérivée lagrangienne Δ_t) et la grandeur encore inconnue λ :

$$(III-3-12) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta \eta_{aa}}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} (C_0 + C_1 \sigma_{aa} + C_2 \sigma_{aa}^2) \\ \quad + \lambda [1 + 2 \eta_{aa} - 2 (C_0 + C_1 \sigma_{aa} + C_2 \sigma_{aa}^2)] \left(\frac{2}{3} \sigma_{aa} - \frac{2}{3} \sigma_{bb} \right) \\ 0 = \frac{\Delta}{\Delta t} (C_0 + C_1 \sigma_{bb} + C_2 \sigma_{bb}^2) \\ \quad + \lambda [1 + 2 \eta_{bb} - 2 (C_0 + C_1 \sigma_{bb} + C_2 \sigma_{bb}^2)] \left(\frac{1}{3} \sigma_{bb} - \frac{1}{3} \sigma_{aa} \right). \end{array} \right.$$

Le problème est donc plus complexe que celui des corps visco-élastiques où, par suite de l'hypothèse d'une déformation de même nature (quoique d'intensité différente en composition Maxwell) dans les deux phases, nous pouvions nous ramener à une seule relation entre ε_{aa} (ou η_{aa}) σ_{aa} , et leurs dérivées, les divers coefficients étant d'autre part des constantes.

a. Commençons par supposer λ constant.

Les relations (III-3-12) caractérisent un corps visco-élastique de MAXWELL qui est parcouru par une onde plane, les dimensions latérales étant préservées par compensation mutuelle des déformations latérales partielles des deux phases et la phase visqueuse étant incompressible. Ces relations permettent donc l'étude du problème signalé en note à la page 69, dans le cas particulier d'une phase visqueuse incompressible.

b. Supposons maintenant que λ soit une fonction homogène du premier degré des dérivées premières de η_{aa} , σ_{aa} et σ_{bb} les coefficients de ces dérivées étant des fonctions absolument quelconques de η_{aa} , σ_{aa} et σ_{bb} .

Le temps peut être éliminé des relations (III-3-12) qui se réduisent à deux équations différentielles d'ordre 1 pour les inconnues σ_{aa} et σ_{bb} , la variable indépendante étant η_{aa} . Les solutions de ce système donnent l'état de tension en fonction de l'état de déformation, quelle que soit la loi de variation temporelle de ce dernier, ou encore quelle que soit la vitesse de déformation. La substance ainsi caractérisée est donc sans viscosité.

Qu'en est-il des ondes permanentes dans une telle substance? Revenons à un diagramme bien connu maintenant (Fig. 11).

La courbe (I) représente l'équation d'état statique de la substance et la droite (II) représente la seconde relation d'HUGONIOR (III-2-55) pour une onde permanente de célérité donnée. Les deux solutions *statiques* communes aux deux courbes sont l'état aval (I) et l'état amont (2). Entre ces

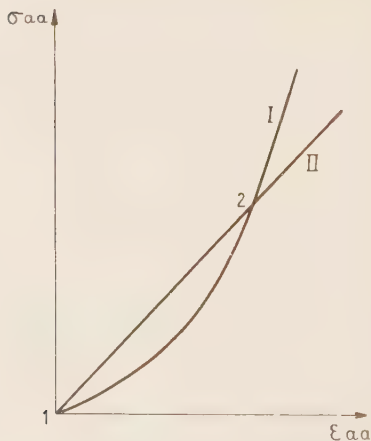


Fig. 11

deux points les solutions sont différentes. Mais nous sommes alors dans l'épaisseur du front d'onde, les vitesses de déformation sont loin d'être négligeables et nous devons appliquer l'équation d'état dynamique. C'est lorsqu'un profil d'onde permanente s'est établi, c'est-à-dire pour une répartition spatiale déterminée des vitesses de déformation, que la courbe tension-déformation, donnée par l'équation d'état dynamique, vient se confondre avec la droite (II). Cette discussion montre comment le profil permanent s'établit et se maintient par la mise en jeu de tensions liées à la vitesse de déformation, qui viennent combler l'écart qui existe entre l'équation d'état statique et la seconde relation d'HUGONIOT.

Or, dans le cas actuel, les vitesses de déformation ont un effet nul. L'ajustement que nous venons de décrire ne peut donc pas se faire, et ce n'est que dans le cas tout à fait exceptionnel donnant comme solution de (III-3-12) une droite par l'origine dans le plan ε_{aa} , σ_{aa} que la *propagation d'ondes permanentes* est possible. Leur profil est alors sans importance.

Dans tous les autres cas les ondes se déforment. Ou bien elles s'étaient et cet étalement va jusqu'à une épaisseur infinie de l'onde; ou bien elles se rétrécissent jusqu'à devenir des discontinuités mathématiques.

Du point de vue de la propagation des ondes ces substances ne se distinguent donc en rien des substances non-dissipatives ⁽¹⁾.

Les *substances plastiques*, dans leur définition habituelle, rentrent dans la présente catégorie. Le facteur λ est en effet défini de la manière suivante : on admet que la phase plastique se déforme chaque fois que se trouve vérifiée la relation (H 118) [L 17]

$$\text{III-3-13)} \quad (\sigma_{aa} - \sigma_{bb})^2 + (\sigma_{bb} - \sigma_{cc})^2 + (\sigma_{cc} - \sigma_{aa})^2 = F$$

F étant une grandeur que je préciserai ultérieurement. C'est la condition d'écoulement de VON MISES, exprimée dans le repère des directions principales. Utilisant (III-3-1) il vient :

$$\text{(III-3-14)} \quad \frac{1}{\lambda^2} [(D_{aa}^\lambda - D_{bb}^\lambda)^2 + (D_{bb}^\lambda - D_{cc}^\lambda)^2 + (D_{cc}^\lambda - D_{aa}^\lambda)^2] = F$$

ou

$$\text{(III-3-15)} \quad \lambda = \left[\frac{1}{F} [(D_{aa}^\lambda - D_{bb}^\lambda)^2 + (D_{bb}^\lambda - D_{cc}^\lambda)^2 + (D_{cc}^\lambda - D_{aa}^\lambda)^2] \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dans les conditions particulières de la déformation par tranches planes (mais le résultat, que nous avons en vue, reste valable dans des cas plus généraux), il vient par symétrie :

$$\text{(III-3-16)} \quad D_{cc}^\lambda = D_{bb}^\lambda$$

⁽¹⁾ Parce que, par hypothèse sur λ , la dissipation se fait sans engendrer de résistances mécaniques.

donc

$$(III-3-17) \quad \lambda = \sqrt{\frac{2}{F}} |D_{aa}^\lambda - D_{bb}^\lambda|.$$

D'après III-3-7) nous avons

$$(III-3-18) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_{aa}^\lambda = \frac{1}{1 + 2\eta_{aa}^\lambda} \frac{\Delta \eta_{aa}^\lambda}{\Delta t} \\ D_{bb}^\lambda = \frac{1}{1 + 2\eta_{bb}^\lambda} \frac{\Delta \eta_{bb}^\lambda}{\Delta t} \end{array} \right.$$

Exprimons d'autre part la loi élastique (III-2-7) sous la forme :

$$(III-3-19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_{aa}^e = G_{aa}(\sigma_{aa}, \sigma_{bb}) \\ \eta_{cc}^e = \eta_{bb}^e = G_{bb}(\sigma_{aa}, \sigma_{bb}) \end{array} \right.$$

Compte tenu encore de

$$(III-3-20) \quad \eta = \eta^e + \eta^\lambda$$

(III-1-17) peut s'écrire enfin :

$$(III-3-21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \sqrt{\frac{2}{F}} \left| \frac{1}{1 + 2\eta_{aa} - 2G_{aa}} \frac{\Delta \eta_{aa}}{\Delta t} - \left(\frac{1}{1 + 2\eta_{aa} - 2G_{aa}} \frac{dG_{aa}}{d\sigma_{aa}} + \frac{1}{1 - 2G_{bb}} \frac{\Delta G_{bb}}{\Delta \sigma_{bb}} \right) \frac{\Delta \sigma_{aa}}{\Delta t} \right. \\ \quad \left. - \left(\frac{1}{1 + 2\eta_{aa} - 2G_{aa}} \frac{dG_{aa}}{d\sigma_{bb}} + \frac{1}{1 - 2G_{bb}} \frac{dG_{bb}}{d\sigma_{bb}} \right) \frac{\Delta \sigma_{bb}}{\Delta t} \right| \end{array} \right.$$

ou, de manière plus simple :

$$(III-3-22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \sqrt{\frac{2}{F}} \left| f_1(\eta_{aa}, \sigma_{aa}, \sigma_{bb}) \frac{\Delta \eta_{aa}}{\Delta t} \right. \\ \quad \left. + f_2(\eta_{aa}, \sigma_{aa}, \sigma_{bb}) \frac{\Delta \sigma_{aa}}{\Delta t} + f_3(\eta_{aa}, \sigma_{aa}, \sigma_{bb}) \frac{\Delta \sigma_{bb}}{\Delta t} \right| \end{array} \right.$$

Le coefficient de $\sqrt{\frac{2}{F}}$ est donc bien une fonction linéaire homogène des dérivées premières.

et, pour qu'il en soit de même de λ , il faut et il suffit que F soit indépendant de ces dérivées.

Or voici les hypothèses habituellement faites en plasticité :

a. Plasticité parfaite.

F est une constante. (III-3-22) montre que λ a la forme requise pour que la substance soit dépourvue de viscosité. D'après des résultats établis précédemment nous pouvons donc dire de prime abord que :

Les ondes permanentes, d'intensité suffisante pour intéresser le domaine plastique, doivent être une exception dans la substance parfaitement plastique.

Nous pouvons dire davantage. La condition (III-3-13) nous donne :

$$(III-3-23) \quad \sigma_{cc} = \sigma_{bb} = \sigma_{aa} \pm \sqrt{\frac{F}{2}}.$$

Elle délimite dans le plan σ_{aa} , σ_{bb} la bande représentée sur la figure ci-dessous (Fig. 12).

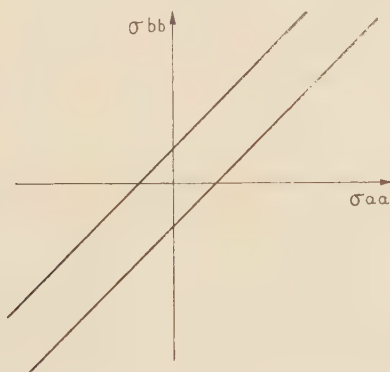


Fig. 12

Il y a écoulement plastique chaque fois que le point représentatif de l'état de tension se trouve sur l'une ou l'autre des droites-frontières. Considérons une onde plane qui se propage dans la substance. La partie frontale de cette onde est forcément purement élastique et, si F est assez faible, la loi élastique valable dans ce domaine est la loi de HOOKE qui, pour une onde plane, s'écrit :

$$(III-3-24) \quad \begin{cases} \sigma_{aa} = \left(K + \frac{4}{3}G\right) \eta_{aa} \\ \sigma_{bb} = \left(K - \frac{2}{3}G\right) \eta_{aa} \end{cases}$$

(ε_{aa} pouvant d'ailleurs être substitué à η_{aa} dans les domaines de validité habituels de la loi de HOOKE)

D'où nous tirons :

$$(III-3-25) \quad \sigma_{bb} = \frac{K - \frac{2}{3}G}{K + \frac{4}{3}G} \sigma_{aa}.$$

Pour une substance comme l'acier, ce rapport est de l'ordre de 0,4; pour une substance comme le caoutchouc il est de l'ordre de 1. (III-3-23) montre alors que :

Dans l'acier la frontière plastique est atteinte dans une onde plane pour l'une ou l'autre des deux valeurs de la tension axiale :

$$(III-3-26) \quad \sigma_{aa} = \pm \sqrt{1,4 F}$$

Dans le caoutchouc elle n'est atteinte qu'à des tensions ou pressions axiales extrêmement élevées (mais, dans ce cas, il est évident que la loi de HOOKE cesse de s'appliquer et qu'il faut reprendre la question en se servant d'une loi élastique non-linéaire).

(III-3-23) donne enfin, en traction axiale simple, avec possibilité d'extension ou de contraction radiale :

$$(III-3-27) \quad \sigma_{aa} = \pm \sqrt{\frac{F}{2}}.$$

Ainsi, pour l'acier, la déformation par tranches planes doit donner des limites d'écoulement plastique environ $\sqrt{2,8}$ fois supérieures à celle correspondant à la traction simple, tandis que pour des substances beaucoup plus élastiques, telles que le caoutchouc, cette élévation de la limite élastique prend des proportions encore beaucoup plus considérables. Ce changement de limite élastique, en passant d'un type de déformation à l'autre, est un effet géométrique qui est tout à fait indépendant de la vitesse de déformation et ne doit pas être confondu avec les divers effets de celle-ci sur la limite élastique, effets qui ont été étudiés dans de nombreuses publications [A 4, A 20, A 61, A 68, A 77, A 93] et qui, pour leur compte, sont en principe, indépendants du type de déformation. Une théorie de la plasticité, basée sur la condition d'écoulement (III-3-13) avec F constant ne peut pas rendre compte de tels effets qui, dans les ondes de choc, ont certainement une grande influence.

Quoi qu'il en soit de cette dernière question, revenons au corps parfaitement plastique, et demandons-nous ce qui se passe derrière la « tête élastique » de l'onde, tête qui, nous le savons, peut être de profil quelconque tant que la loi élastique est linéaire. Supposons que nous maintenions en amont l'état de tension réalisé au sortir de la tête élastique. En principe la phase parfaitement plastique doit s'écouler indéfiniment sous l'effet de cet état de tension *Mais des contraintes géométriques l'en empêchent.* D'une part, en effet, la phase plastique est incompressible, et d'autre part la phase élastique ne peut se déformer à tension constante. Résultat : la phase plastique ne se déforme pas non plus.

Donc, même dans une substance parfaitement plastique, une onde plane de déformation croissante exige, pour des raisons géométriques, une tension croissante corrélative.

β. Écrouissage isotrope.

F est une fonction du travail plastique de déformation par unité de volume dépensé pour atteindre une déformation donnée. Ce travail est en tout point de la substance et dans l'intervalle de temps dt , donné d'après (II-2-7,3) par :

$$(III-3-28) \quad dW_p = \sigma D^{\lambda} dt$$

si nous nous plaçons dans le repère principal. Pour un trajet de déformation fini il vient donc :

$$(III-3-29) \quad W_p = \int_{t_0}^t \sigma D^\lambda dt$$

expression qui, d'après (III-3-7) peut s'écrire encore :

$$(III-3-30) \quad W_p = \int_0^{\eta^\lambda} \sigma [E_3 + 2\eta^\lambda]^{-1} d\eta^\lambda.$$

Posons alors

$$(III-3-31) \quad F = F(W_p).$$

La condition d'écoulement doit s'écrire :

$$(III-3-32) \quad (\sigma_{aa} - \sigma_{bb})^2 + (\sigma_{bb} - \sigma_{cc})^2 + (\sigma_{cc} - \sigma_{aa})^2 = F(W_p)$$

F étant une fonction déterminée une fois pour toutes, cette condition montre que, pour un état de tension donné sur la surface d'écoulement (dans l'espace $\sigma_{aa}, \sigma_{bb}, \sigma_{cc}$), le travail plastique de déformation doit avoir sa valeur déterminée en fonction de cet état de tension.

Donc :

Le travail de déformation plastique est indépendant du chemin qui a conduit à l'état de tension envisagé. *Il est en particulier indépendant de la rapidité avec laquelle ce chemin a été parcouru.* C'est pourquoi on dit de la présente loi d'écrouissage qu'elle ne dépend pas de l'histoire de déformation.

(III-3-32) montre d'autre part qu'à mesure que F varie avec W_p , le cylindre représenté par cette équation augmente de rayon sans changer de forme. C'est pourquoi on dit de la présente loi d'écrouissage qu'elle est isotrope.

En fin de compte F est donc fonction des tensions seulement, et l'expression (III-3-22), que nous avons obtenue pour λ , montre que cette grandeur est encore fonction linéaire de $\frac{\Delta r_{aa}}{\Delta t}$, $\frac{\Delta \sigma_{aa}}{\Delta t}$ et $\frac{\Delta \sigma_{bb}}{\Delta t}$.

Tout ce que nous avons dit, à propos du corps parfaitement plastique, sur la propagation des ondes permanentes reste donc vrai pour le corps plastique à écrouissage isotrope :

Ces ondes n'existent que dans le cas exceptionnel où la solution du système d'équation (III-3-12) est une droite, et leur profil peut alors être quelconque.

Par conséquent, la plasticité des corps, dans l'une ou l'autre des deux acceptions les plus usuelles que nous venons de rappeler, ne peut rendre compte de la structure des ondes. Celle-ci, ainsi que nous l'avait montré l'étude des corps visco-élastiques, est directement liée aux effets de vitesse de déformation, que la plasticité a précisément pour but d'éliminer. Une discussion de la propagation d'ondes *quelconques* dans les corps plastiques doit se faire suivant des idées directrices identiques à celles qui nous ont guidé en ce début de chapitre dans l'étude des solides non-dissipatifs. Dans les deux cas il n'y

a qu'une relation entre les tensions et les déformations que les vitesses de déformation soient grandes ou petites. L'esprit dans lequel von KARMAN-TAYLOR-RAKHMATULIN entendent la plasticité devient alors parfaitement compréhensible. En soi, l'allure de la courbe $\sigma(\varepsilon)$ ne permet pas de savoir si nous sommes dans le domaine élastique non-linéaire ou dans le domaine plastique. C'est la détection ultérieure de déformations permanentes dans l'échantillon qui permet d'affirmer que le domaine plastique a été atteint. De telles déformations ayant été mises en évidence, il est donc parfaitement justifié de parler de plasticité. Mais pour comprendre qu'il s'agit d'une plasticité *de même nature mathématique* que la plasticité habituelle (parfaite ou à écrouissage isotrope), il est nécessaire d'avoir parcouru le chemin qui vient d'être le nôtre.

γ . Pour obtenir des ondes permanentes plastiques de structure définie, il faut faire appel à une définition plus complexe de la plasticité. L'Esprit dont cette définition doit s'inspirer, est clair. Il s'agit de faire sentir dans la loi d'écrouissage les effets des vitesses de déformation; ce qui revient à prêter aux substances plastiques des propriétés *visqueuses*. Les différences les plus importantes entre une phase visqueuse habituelle et une phase plastique ainsi généralisée sont alors les suivantes :

L'écoulement plastique n'entre en jeu qu'au-delà d'un certain seuil déterminé par la frontière d'écoulement (qui peut d'ailleurs prendre des formes différentes de (III-3-13), tandis que l'écoulement visqueux habituel se manifeste dès l'application des charges et quelle que soit leur intensité.

La déformation plastique est permanente et altère les propriétés mécaniques de la substance, tandis que la viscosité ne se manifeste que par l'apparition des tensions liées aux vitesses d'écoulement.

La relation tension-vitesse de déformation de la phase plastique est non-linéaire ainsi que le montre (III-3-1), si l'on tient compte de la définition de λ par (III-3-22), alors que la relation correspondante (III-3-2) de la phase visqueuse est linéaire.

DEUXIÈME PARTIE

MÉTHODES EXPÉRIMENTALES ET RÉSULTATS

CHAPITRE PREMIER

OBTENTION EXPÉRIMENTALE DES ONDES DE CHOC

1. Un explosif qui détone suivant une surface de réaction plane réalise les conditions d'une onde de choc plane. Lorsque les dimensions latérales de l'explosif sont assez petites (moins de 25 mm (1)), il suffit d'amorcer l'explosion de la manière simple représentée sur la figure 13 a. Lorsque les dimensions latérales sont plus importantes, il faut utiliser un cône auxiliaire qui est composé de deux explosifs différents dont les vitesses de détonation sont telles que tous les points situés dans le plan BB' soient atteints simultanément par l'explosion.

Si nous connaissons une équation d'état qui s'applique aux gaz de détonation (portés à des pressions de quelques 200.000 atmosphères et à des températures d'environ 5 000°, pour les explosifs puissants du genre penthrite, ce qui conduit à des densités qui sont de l'ordre des densités liquides), cette équation, jointe aux trois relations d'HUGONIOU nous met en présence de quatre relations pour les cinq inconnues ρ , p , T , D et d ; ρ , p , T étant la densité, la pression et la température du gaz de détonation, d et D étant la vitesse particulière absolue de ce gaz et la célérité du front d'onde. Il suffit donc de mesurer cette dernière pour que le problème soit entièrement déterminé.

La validité de l'équation d'état est évidemment postulée *a priori* dans cette manière de voir. Mais l'onde de détonation — différente en cela de l'onde de choc pure — satisfait une condition supplémentaire : la condition de stabilité de Chapman-Jouguet [L 6, L 11, L 12, L 21, H 88, H 97]. Le régime de détonation stable étant atteint, la vitesse de détonation reste rigoureusement constante malgré les perturbations qui résultent de l'expansion des gaz de détonation. Il n'en peut être ainsi que si la vitesse des perturbations acoustiques derrière le front d'onde est égale à la vitesse de détonation. Appelant c cette

vitesse, mesurée dans les gaz eux-mêmes, mobiles à la vitesse d , nous avons donc la condition :

$$(I-1-1) \quad c + d = D$$

et nous sommes en présence de cinq équations pour cinq inconnues qui déterminent entièrement le problème [puisque $c = c(p, \rho)$]. En comparant les grandeurs ainsi calculées aux grandeurs observées, nous pouvons donc vérifier la qualité de l'équation d'état utilisée.

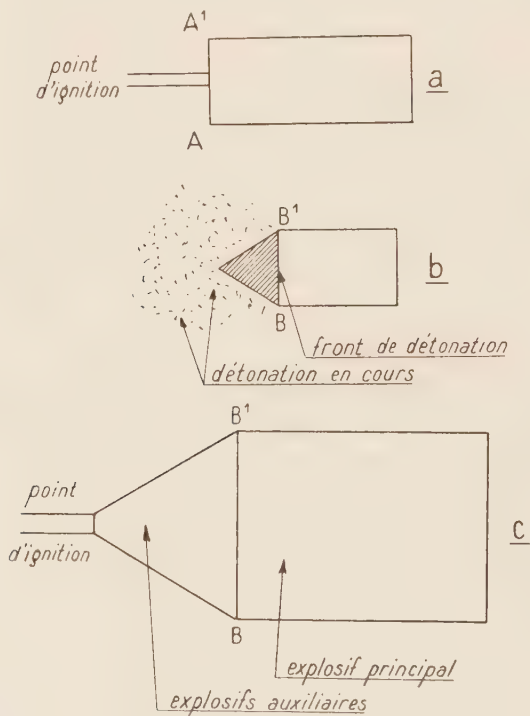


Fig. 13

A l'instant où l'explosif a complètement détoné une discontinuité est née. Ne retenons que les cas où *une onde de choc de compression* est transmise dans le milieu au contact de l'explosif. L'expérience nous apprend que le phénomène dont les gaz de détonation sont le siège sera alors :

- ou bien une *onde de choc de compression*,
- ou bien une *onde de raréfaction* qui s'étale

(ce qui s'explique par les considérations du 3^e chapitre de la 1^{re} partie où nous avons montré qu'en milieu gazeux les ondes de compression stables

sont des chocs, les ondes de raréfaction stables n'existant pas). Les deux mécanismes possibles sont représentés sur la figure 14 ci-contre :

d	$u_o = 0$
ρ_d	$p_o = 0$
ρ_d	ρ_o
T_d	T_o

instant de détonation complète

d	$u' = u$	u	$u_o = 0$
ρ_d	$p' = p$	p	$p_o = 0$
ρ_d	ρ'	ρ	ρ_o
T_d	T'	T	T_o

choc - choc

d	$u' = u$	u	$u_o = 0$
ρ_d	$p' = p$	p	$p_o = 0$
ρ_d	ρ'	ρ	ρ_o
T_d	T'	T	T_o

raréfaction choc

Fig. 14

A. MÉCANISME CHOC-CHOC. — Avec les notations de la figure 14 les équations qui le décrivent sont (toutes les vitesses particulières sont des vitesses absolues; elles sont mesurées positivement vers la droite; la célérité C est mesurée positivement vers la droite, la célérité C' est mesurée positivement vers la gauche) :

Choc transmis dans le milieu:

$$(I-1-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(u - C) = -\rho_o C \\ u = \left[P \left(\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ E - E_o = \frac{P}{2} \left(\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho} \right) \end{array} \right.$$

Choc réfléchi dans les gaz:

$$(I-1-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho' (u + C') = \rho_a (d + C') \\ u = d - \left[(p - p_a) \left(\frac{1}{\rho_a} - \frac{1}{\rho'} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ E' - E_a = \frac{1}{2} (p + p_a) \left(\frac{1}{\rho_a} - \frac{1}{\rho'} \right) \end{array} \right.$$

Le milieu initial (indice 0) est connu; les gaz de détonation (indice a) sont supposés connus. Donnons-nous en outre une équation d'état pour les deux milieux intermédiaires (indice 1 et sans indice) : les énergies E et E^1 deviennent des fonctions de p , ρ et de $p' = p$, $\rho' = \rho$ et nous restons avec six relations pour les inconnus :

C et C'

u , p , ρ et ρ' .

Le problème est donc *entièrement déterminé*. On se rappelle que dans le cas de l'onde de choc unique il ne l'était pas; cette onde introduisait les cinq inconnues u , p , ρ , T et C , pour quatre équations seulement. Chacune de nos deux ondes présentes introduit le même nombre d'inconnues, mais deux conditions de continuité supplémentaires apparaissent :

$$(I-1-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = u \\ p' = p \end{array} \right.$$

Donc, si le problème de l'onde de choc unique admet a priori une infinité de solutions à 1 paramètre, le problème de l'émission de deux ondes de choc à partir d'une discontinuité initiale ne donne qu'une seule solution et une seule.

Admettons que l'expérience donne les deux grandeurs C et ρ (c'est le cas dans la méthode de radiographie instantanée que nous décrivons plus loin). Les deux premières relations (I-1-4) donnent alors :

$$(I-1-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) C \\ p = \frac{\rho_0}{\rho} (\rho - \rho_0) C^2 \end{array} \right.$$

L'état de la substance au contact de l'explosif est ainsi complètement déterminé. Les deux premières relations (I-1-3) donnent ensuite :

$$(I-1-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho_a} - \frac{(u - d)^2}{p - p_a} \\ C' = \frac{\rho_a d - \rho' u}{\rho' - \rho_a} \end{array} \right.$$

L'état des gaz au contact de la substance est donc aussi complètement déterminé, de même que la célérité C' de l'onde de choc réfléchie dans les gaz.

Si nous voulions enfin déterminer les températures T et T' , nous devrions faire appel aux deux relations d'HUGONIOT qui contiennent l'énergie. Nous ne le ferons pas.

Il est possible de donner aux résultats précédents une représentation graphique quantitative très simple (L 12). Nous avons vu que l'onde de choc transmise est définie par les relations (I-1-2) en fonction d'une de ses grandeurs caractéristiques, soit p par exemple. Plaçons-nous dans le plan u, p et supposons résolues les relations d'HUGONIOT. Traçons la courbe $u(p)$ correspondante qui passe forcément par le point $u_0 = p_0 = 0$ (fig. 15).

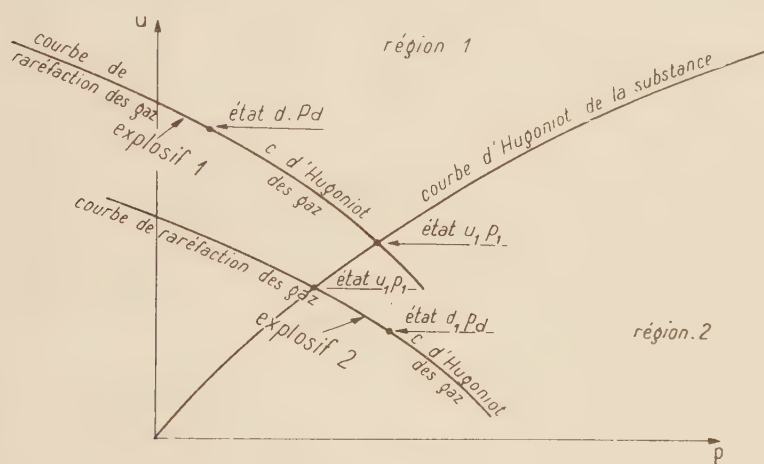


Fig. 15

De la même manière l'onde de choc réfléchie est définie par les relations (I-1-3) en fonction d'une de ses grandeurs caractéristiques, soit p' . Traçons la courbe $u'(p')$ correspondante qui passe forcément par le point d, p_d . L'onde se déplaçant dans le sens opposé au sens adopté pour la mesure des vitesses particulières, la vitesse u' sera d'autant plus petite que la pression sera plus élevée. Nous devons alors distinguer deux cas :

1. Le point p_d, d se trouve dans la région 1. La courbe de l'onde C' coupe la courbe de l'onde C en un point bien déterminé. Ce point donne la solution du système complet des relations (I-1-2) et (I-1-3), complétées par les conditions (I-1-4).

2. Le point p_d, d se trouve dans la région 2. Les deux courbes ne peuvent pas se rencontrer. Le mécanisme choc-choc est exclu.

B. MÉCANISME RARÉFACTION-CHOC. — L'onde de choc est encore décrite par les relations d'HUGONIOT (I-1-2). L'onde de raréfaction réfléchie doit être étudiée par les méthodes générales de la mécanique des milieux continus. Sans entrer ici dans le détail de ces calculs (L 12), disons seulement qu'ils

conduisent à une expression entre u' et p' qui donne évidemment des vitesses particulières croissantes pour des pressions décroissantes. Cette fois nous devons donc nous placer dans la région 2 du plan si nous voulons rencontrer la courbe d'HUGONIOT de l'onde transmise C. Nous avons représenté sur la même figure ce cas, en supposant que, la substance restant la même, l'explosif utilisé est différent. On peut évidemment tout aussi bien conserver le même explosif et changer de substance afin de passer d'un mécanisme à l'autre.

Faisons une remarque : on voit qu'il suffit de déterminer expérimentalement la courbe $u(p)$ de l'onde de choc transmise par la mesure de deux grandeurs caractéristiques de cette onde, et de connaître en outre l'état initial d, p_d du gaz de détonation pour savoir quel mécanisme entre en jeu. L'emploi toujours douteux d'une équation d'état valable pour la substance comprimée peut donc être évité.

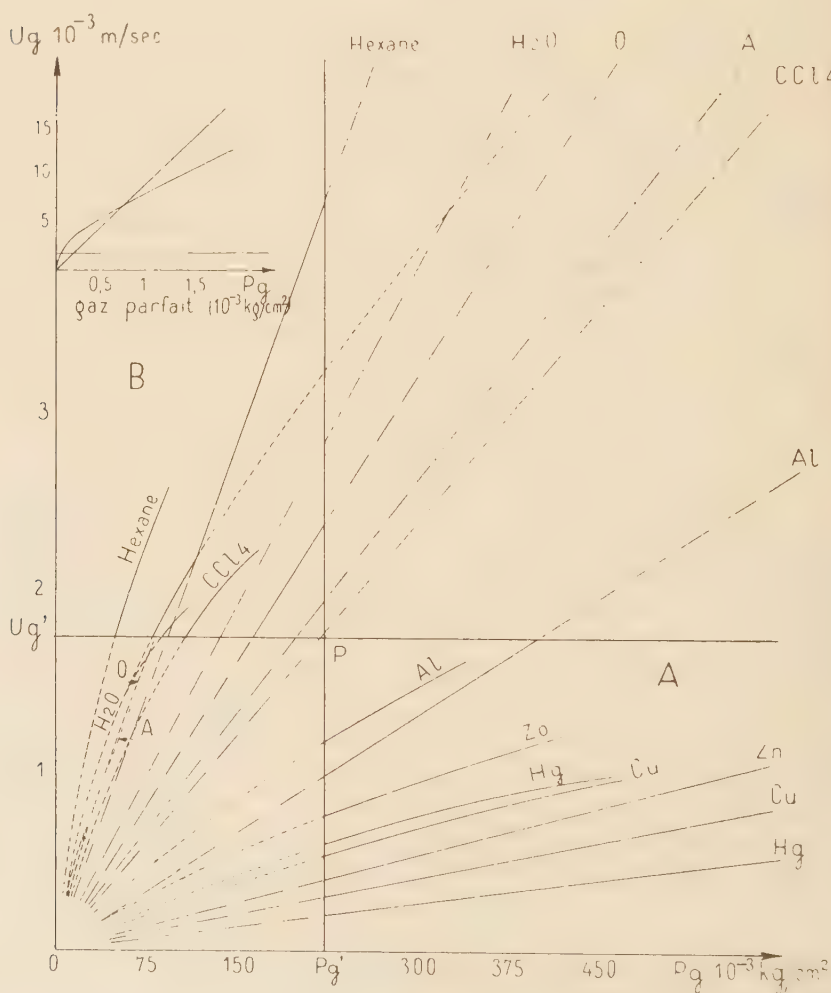


Fig. 16

Il est possible de se faire une idée de la célérité C de l'onde transmise par le raisonnement simple suivant (A 52,2). Le mécanisme choc-choc donne les inégalités

$$(I-1-7) \quad p > p_a, \quad u < d$$

le mécanisme raréfaction-choc donnant les inégalités inverses :

$$(I-1-8) \quad p < p_a, \quad u > d.$$

Supposons connus p_a et d pour un certain explosif. Les deux droites $u = d$ et $p = p_a$ divisent le plan p, u en quatre régions (fig. 16) et nous voyons que le mécanisme choc-choc se situe forcément dans la région A, tandis que le mécanisme raréfaction-choc se situe dans la région B, les deux autres régions étant interdites.

Divisons maintenant le plan p, u en deux régions par la condition

$$(I-1-9) \quad C = D$$

C étant toujours la célérité de l'onde de choc transmise et D étant la célérité de l'onde de détonation initialement incidente. Les relations d'HUGONOT nous donnent pour l'onde de choc

$$(I-1-10) \quad C = \frac{p}{\rho_0 u}$$

et pour l'onde de détonation

$$(I-1-11) \quad D = \frac{p_a}{\rho_e d}$$

ρ_e étant la densité de l'explosif à l'état solide avant détonation. La condition $C = D$ peut donc s'écrire :

$$(I-1-12) \quad u = \frac{\rho_e p}{\rho_0 p_a} d.$$

Elle donne, dans le plan p, u , une droite par l'origine et dont l'inclinaison dépend à la fois de la nature de l'explosif et du milieu. Tous les points situés par rapport à cette droite du côté des hautes pressions correspondent à des ondes de choc de célérité C supérieures à la vitesse de détonation D , tandis que les points situés par rapport à cette droite du côté des basses pressions correspondent à des ondes de choc de célérité C inférieure à la vitesse de détonation D . Nous appellerons les premières « ondes de choc superdétonation » et les secondes « ondes de choc subdétonation ».

Pour les substances moins denses que l'explosif solide la droite $C = D$ passe au-dessus du point P et le mécanisme raréfaction-choc permet des ondes sub- et superdétonation, le mécanisme choc-choc n'autorisant que ces dernières. Pour les substances plus denses que l'explosif solide, la droite $C = D$ passe au-dessous du point P et le mécanisme raréfaction-choc ne permet que les ondes subdétonation, le mécanisme choc-choc autorisant cette fois les deux types d'ondes.

Ces résultats sont groupés dans le tableau suivant :

TABLEAU I

	Raréfaction - Choc	Choc - Choc
$\rho_0 < \rho_1$	$C < D$ ou $C > D$	$C > D$
$\rho_0 > \rho_1$	$C < D$	$C < D$ ou $C > D$

Afin de savoir laquelle de ces possibilités se réalise effectivement pour une substance donnée, nous avons porté sur la figure 16 les adiabatiques d'HUGONOT expérimentales d'un certain nombre de substances (A 16, A 38, A 60, A 87, A 95, A 121, A 122) les droites $u = d$, $p = p_d$ et $C = D$ étant tracées pour l'explosif penthrite.

Dans tous les cas retenus, les extrémités des courbes expérimentales se situent dans le domaine des ondes de choc subdétonation. Pour les substances peu compressibles et denses le mécanisme choc-choc entre en jeu, ainsi que nous l'avions laissé prévoir, et il n'est pas impossible que les ondes de choc superdétonation deviennent possibles aux très hautes pressions. Mais ces pressions sont situées au-delà des possibilités de la penthrite. Pour les substances plus compressibles et moins denses le mécanisme raréfaction-choc entre en jeu, et la figure montre que la réalisation d'ondes superdétonation est impossible dans les cas envisagés, à l'exception peut-être de l'hexane. A titre d'illustration nous avons joint à la figure le diagramme théorique correspondant au gaz parfait (A 41, A 117). C'est évidemment le mécanisme raréfaction-choc qui joue et les ondes superdétonation deviennent possibles à partir de 600 atm. environ. A la lumière de ces résultats l'affirmation de M. LAFFITTE (H 127, A 46), qui dit avoir observé des ondes de choc superdétonation dans les gaz, apparaît donc comme très vraisemblable.

2. La condition nécessaire à la production d'une onde de choc — outre la stabilité de cette dernière dans la substance à étudier — est la création d'une discontinuité en l'une au moins des deux variables u et p . Cette discontinuité peut être créée par l'impact de deux masses en mouvement relatif convergent. Pour simplifier, nous pouvons toujours nous ramener par un changement de repère au cas où l'une des masses est au repos. A l'instant du choc la discontinuité créée dans la vitesse est égale à la vitesse relative des deux masses avant l'impact. Supposons la discontinuité de pression nulle (autre hypothèse simplificatrice non nécessaire). Appelons « échantillon » ou « substance 1 » la masse au repos que nous supposons être à droite. Appelons de même « projectile » ou « substance 2 » la masse animée d'un mouvement rigide de vitesse u' et située à gauche. Il suffit de remplacer dans la figure 15 les mots « explosif » et, « substance » par « projectile » et « échantillon » pour pouvoir raisonner sur cette figure. Sa pression étant supposée nulle, le point caractéristique de l'état initial du projectile se trouve sur l'ordonnée du plan

p, u ; de ce fait le mécanisme raréfaction-choc est donc exclu; la courbe d'HUGONOT issue de ce point a l'allure indiquée et elle rencontre l'abscisse en un point de pression d'autant plus élevée que la vitesse particulière u'' est plus grande. De plus, pour une vitesse particulière u'' donnée, le point de rencontre de la courbe d'HUGONOT avec l'abscisse est d'autant plus éloigné de l'origine que la substance du projectile est moins compressible. *Nous situerons donc ce point de rencontre à des pressions d'autant plus grandes que la vitesse d'impact u'' sera plus grande et que la compressibilité de la substance du projectile sera plus faible.*

Un cas particulier est celui où le projectile et l'échantillon sont de même substance. Leurs courbes d'HUGONOT issues de deux points situés sur l'ordonnée admettent alors l'horizontale d'ordonnée $\frac{u''}{2}$ comme axe de symétrie et c'est sur cette droite que les deux courbes se rencontrent. L'état consécutif à l'impact est alors forcément représenté par deux ondes de choc divergentes de même intensité; la vitesse particulière de cet état est $\frac{u''}{2}$, tandis que la pression est donnée par l'abscisse du point d'intersection des deux courbes. En nous ramenant alors à la figure 4 il est facile d'y lire la vitesse d'impact-seuil u''_s à partir de laquelle la pression créée devient supérieure à celle produite par l'action directe de l'explosif.

Nous trouvons pour les différentes substances, faisant intervenir avec l'explosif le mécanisme choc-choc, et dans l'ordre des vitesses d'impact croissantes:

TABLEAU II

	Vitesse d'impact
	M/sec.
Cu.	1 060
Hg.	1 200
Zn.	1 500
Al.	2 300

Pour les liquides portés sur la figure, la courbe d'HUGONOT expérimentale ne s'étend pas jusqu'à la pression des gaz de détonation de la penthrite, le mécanisme raréfaction-choc entrant en jeu. Les vitesses d'impact-seuil ne peuvent donc être déterminées avec précision. On voit cependant qu'elles deviennent très vite très grandes. Pour l'eau, seul liquide dont la courbe d'HUGONOT ait été établie au-delà de la pression p_d , nous trouvons la vitesse $u''_s = 6\,400$ m/sec.

Le cas symétrique que nous venons d'envisager n'est évidemment pas le plus intéressant du point de vue de l'efficacité. Son importance particulière vient de ce qu'il garantit la symétrie rigoureuse des phénomènes et qu'il permet ainsi une vérification précise et simple des différentes hypothèses introduites par la théorie.

Ayant ainsi rapidement indiqué comment l'impact de projectiles peut donner de fortes pressions, il resterait à voir comment ces vitesses peuvent être atteintes. Trois voies sont possibles :

1. Accélération au moyen de la force de Lorentz exercée par des champs électromagnétiques. Cette méthode offre les plus grandes possibilités mais n'a guère été utilisée en pratique jusqu'à ce jour [A 132, A 133, A 134] quoique dès la première guerre mondiale elle ait été envisagée par des ingénieurs allemands et japonais.

2. Le canon à gaz léger [A 135]. Ce moyen a tendance à se développer beaucoup.

3. L'emploi d'explosifs puissants. C'est le moyen le plus simple, mais aussi le plus hasardeux. Nous avons donné dans notre thèse une analyse des conditions indispensables qu'il faut satisfaire. Les nécessités de l'impression nous obligent à supprimer cette étude. On pourra consulter à ce sujet (A 89-5, A 118, A 119, A 136).

CHAPITRE II

LES MÉTHODES D'OBSERVATION DES ONDES DE CHOC

§ 1. Détermination expérimentale de la célérité C de l'onde
et de la vitesse particulière u

Les méthodes que nous décrivons dans ce paragraphe déterminent la célérité C de l'onde et la vitesse u_s acquise par une surface de l'échantillon, parallèle à l'onde, au passage de cette dernière. Divers auteurs ont montré que cette vitesse peut être prise, avec une approximation suffisante, égale à deux fois la vitesse particulière (A 121). Ces méthodes ont été spécialement conçues pour l'étude des ondes de choc dans les solides, mais certaines d'entre elles peuvent être adaptées aux liquides.

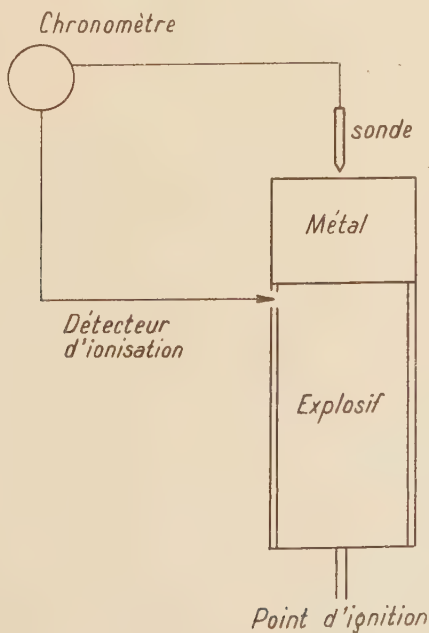


Fig. 17

a. Un premier travail, dû à PACK, EVANS et JAMES (A 75) remonte à 1948. Ces auteurs mesuraient la durée que met une onde de choc pour traverser des échantillons cylindriques d'acier et de plomb d'épaisseur connue. A cet effet, ils se contentaient d'enregistrer sur un chronomètre les instants d'entrée et de sortie de l'onde de choc en disposant à proximité immédiate de la face de l'échantillon au contact de l'explosif un détecteur d'ionisation, et à proximité immédiate de la face opposée à l'explosif, une sonde. Détecteur et sonde étaient reliés au chronomètre (fig. 17). Les épaisseurs des échantillons allaient de 1 à 12 cm. Une série de points temporels étant obtenus, la courbe trajet-temps était tracée et donnait, par sa tangente, la célérité de l'onde. L'état de la substance derrière le front d'onde était ensuite déterminé par l'emploi simultané des 3 relations d'HUGONIOT et d'une équation d'état appropriée.

b. En 1952, SHREFFLER et DEAL (A 103) ont développé une méthode différente. Une plaque métallique (fig. 18) est au contact d'un explosif. L'onde de choc traverse le métal et vient heurter la face opposée de la plaque. A ce

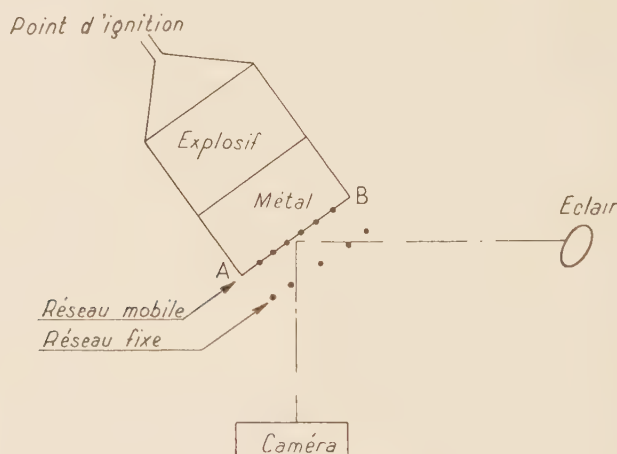


Fig. 18

moment cette face se déplace. Le but de la méthode est d'enregistrer photographiquement son mouvement. A cet effet, un réseau de coordonnées est tracé sur la face AB et un deuxième réseau est placé à proximité de la face. Le premier réseau se déplace avec la face AB, tandis que le second reste évidemment fixe. Une caméra donnant une vingtaine de clichés espacés de une microseconde, et de durée de 0,2 microseconde chacun, enregistre les positions successives du réseau mobile relativement au repère fixe. L'éclairage se fait au moyen d'un éclair. Un obturateur incorporé dans la caméra commande le temps de pose de chaque cliché et l'espacement des clichés successifs. Un choix judicieux des coordonnées et de leur disposition dans l'espace permet de remonter du déplacement apparent sur le cliché au dépla-

gement réel dans l'espace et d'en déduire la vitesse u_s . Pour obtenir en outre la célérité de l'onde, il suffit de joindre au montage précédent un dispositif permettant de mesurer la durée écoulée entre le déclenchement de l'explosion et l'apparition de l'onde de choc à la surface libre et d'opérer sur une série d'échantillons d'épaisseurs différentes.

c. Toujours en 1952 ALLEN et MC CRARY (A 3) ont utilisé la méthode suivante (fig 19). Le dispositif explosif-échantillon reste le même que précédemment, le diamètre de l'explosif étant cependant inférieur à celui de l'échantillon. La face AB est polie de manière qu'elle puisse réfléchir dans la caméra les images d'une rangée de sources lumineuses ponctuelles. La caméra est à miroir tournant ou à film mobile et est placée de manière que, tant que le

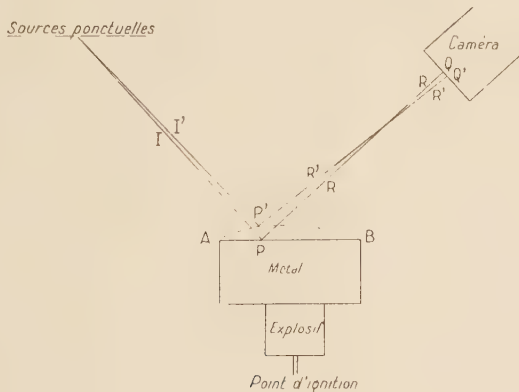


Fig. 19

face AB est immobile et plane (état d'avant l'explosion), les images des sources soient enregistrées sur le film sous forme de fines bandes parallèles. La détonation engendre une onde de choc incurvée et lorsque celle-ci atteint la face AB, elle la déforme. Les images des sources sont alors déviées et les déviations sont enregistrées sur le film. Connaissant la géométrie du montage, on peut en déduire le comportement statio-temporel de la face AB, donc la vitesse u_s . L'instant auquel l'onde de choc atteint la face AB est indiqué par une brisure très nette des trajectoires des sources lumineuses sur le film. Une série d'expériences, faites avec des échantillons d'épaisseur variable, conduit donc encore à la célérité de l'onde.

d. *La méthode des sondes.* — Elle a été beaucoup utilisée et en particulier par MINSHALL (A 67), MALLORY (A 60) et GORANSON (A 38).

C'est une généralisation de la méthode de PACK, EVANS et JAMES. Le schéma du dispositif expérimental est celui de la figure 20. Un premier ensemble de sondes (groupe A) est placé dans des cavités creusées dans l'échantillon à des profondeurs variables. Les extrémités des sondes doivent être aussi près que possible de la base des cavités. A mesure que l'onde de choc atteint les bases des cavités, celles-ci sont mises en mouvement et viennent, au contact

des sondes, fermer des circuits électriques. Les instants de fermeture sont enregistrés sur un oscillographe. L'instant d'entrée de l'onde de choc dans l'échantillon est par ailleurs enregistré au moyen d'un dispositif approprié, qui sera par exemple le détecteur d'ionisation de PACK, EVANS et JAMES. De cette manière, la courbe trajet-temps de l'onde de choc est donc tirée d'une seule expérience. Deux cas doivent être distingués :

l'onde de choc est assez puissante pour ne pas s'amortir notablement sur l'étendue couverte par les ondes. La courbe trajet-temps est une droite ;

l'onde de choc s'amortit sur la distance couverte par les sondes. On obtient une courbe trajet-temps incurvée.

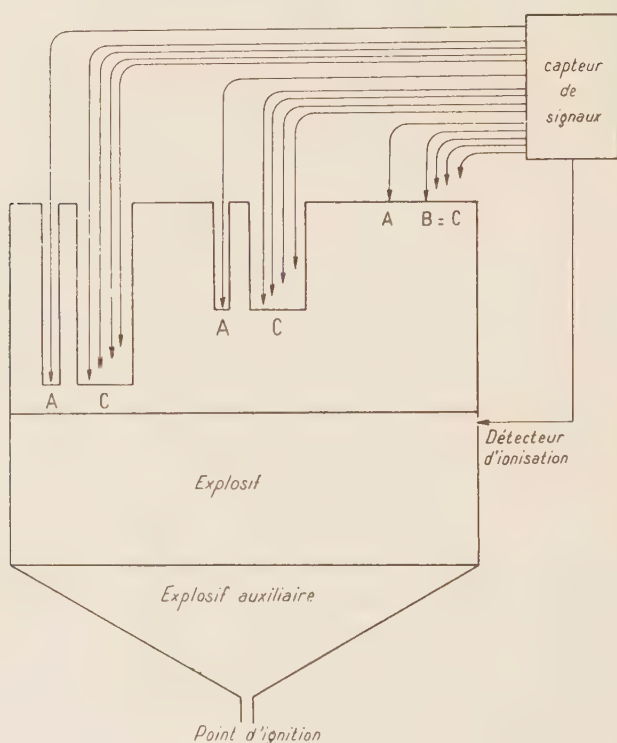


Fig. 20

Un deuxième ensemble de sondes permet de mesurer la vitesse u_s . Si l'onde de choc n'est pas notablement amortie dans l'épaisseur de la plaque, il suffit de disposer un certain nombre de sondes (groupe B) à des distances variables de la surface libre de la plaque. Les instants de fermeture des circuits correspondants donnent alors la courbe espace-temps du mouvement de la surface libre, consécutif au passage de l'onde de choc. D'où la vitesse u_s correspondant à la célérité C mesurée par le groupe A. Lorsque, par contre, l'onde s'amortit dans l'épaisseur de la plaque, il est nécessaire de disposer un ensemble de

sondes (groupes C) à des distances variables des bases de cavités auxiliaires couplées une à une avec les cavités du groupe A.

Les vitesses u_s , étant ainsi déterminées, on peut calculer le retard entre l'instant d'arrivée de l'onde de choc sur les bases des cavités et l'instant de fermeture des circuits du groupe A et introduire la correction correspondante sur le calcul de la célérité C.

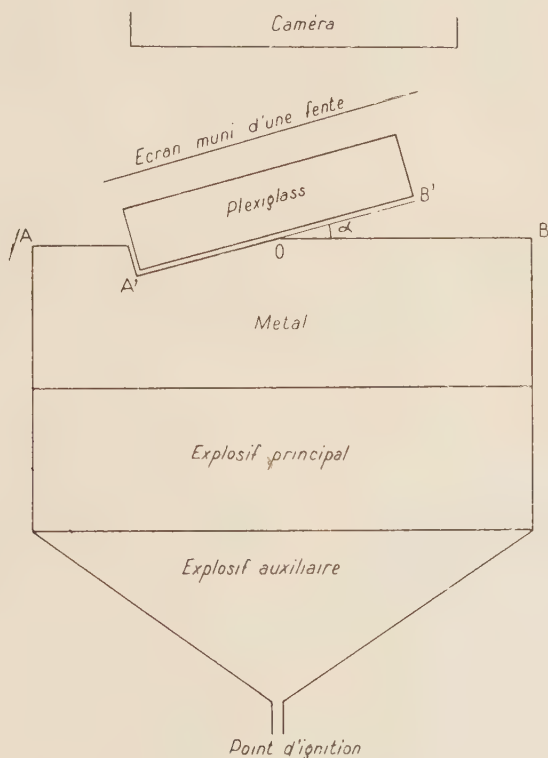


Fig. 21

Diverses causes d'erreur doivent être mentionnées :

d'abord les instants d'arrivée de l'onde de choc sur les bases des cavités ont une légère avance sur les instants de fermeture des circuits. Cette « différence » est la même pour tous les points dans le cas de l'onde de choc non-amortie, différente d'une sonde à l'autre pour l'onde de choc amortie;

il se peut en outre que la fermeture de certains circuits se fasse prématurément, par suite de l'ionisation de l'atmosphère des cavités. Certains auteurs ont tenté de se libérer de cette source d'erreur en remplissant les cavités d'un gaz difficilement ionisable, ou encore en faisant le vide.

e. Une méthode assez différente a été développée en 1954 à Los Alamos par WALSH et CHRISTIAN (A 121). Elle consiste essentiellement à substituer aux

signaux discontinus de la méthode des sondes un enregistrement continu du mouvement de l'onde dans le bloc métallique et du mouvement de la surface libre AB de ce dernier. Le principe de la méthode est le suivant (fig. 21) : à l'extrémité du métal, opposée à l'explosif, on fait une entaille d'angle $\alpha = 10^\circ$ environ avec la surface libre. Un bloc de plexiglass est disposé parallèlement au fond de l'entaille et de manière que métal et plexiglass soient séparés de 2 à 3 dixièmes de millimètre. Ainsi que le montre la figure, le bloc de plexiglass est prolongé en dehors de l'entaille. Considérons alors une onde de choc plane allant du bas vers le haut. A partir de l'instant auquel elle atteint le point A', son point d'intersection avec le fond A'O de l'entaille se déplace de gauche à droite à la vitesse

$$(II-1-1) \quad V = \frac{C}{\operatorname{tg} \alpha}$$

C étant la célérité de l'onde de choc. A partir de l'instant où l'onde de choc atteint la surface libre OB du bloc métallique, cette surface est mise en mouvement et son point d'intersection avec OB' se déplace à la vitesse

$$(II-1-2) \quad v = \frac{u_s}{\operatorname{tg} \alpha}$$

u_s étant la vitesse de déplacement de la surface libre. Dès lors il suffit de se placer dans des conditions expérimentales telles que l'onde de choc ne soit pas sensiblement amortie dans la durée de l'expérience, pour que les grandeurs C et u_s mesurées correspondent très sensiblement à un état donné de l'onde. Ces grandeurs s'obtiennent de la manière suivante : une caméra se trouve dans l'axe du système explosif-métal. Le film (ou le miroir incorporé) est animé d'un mouvement perpendiculaire au plan de la figure. Un écran, muni d'une fente étroite dans le plan de la figure, est placé devant le bloc de plexiglass. L'arrivée de l'onde de choc de A' en O, et de la surface libre de O en B', rend l'air lumineux et cette trace lumineuse est enregistrée sur le film. Sous l'effet du choc, le plexiglass devient opaque de manière quasi-instantanée et seule la lumière émise à l'instant du choc est transmise. En même temps la fente réduit les dimensions perpendiculaires au plan de la figure du faisceau transmis. En définitive tout se passe donc comme si se déplaçait le long de A'O B' une source ponctuelle et le film enregistre deux traces lumineuses qui donnent V et v respectivement. C et u_1 en résultent.

Deux précautions doivent être prises. Dans certains cas l'air insuffisamment lumineux doit être remplacé par de l'argon. Par ailleurs il faut éviter que le long de OB' soit enregistrée la trace de l'onde de choc transmise dans le gaz. A cet effet une feuille d'aluminium est disposée parallèlement au fond du bloc de plexiglass entre O et B'. Cette feuille est assez solide pour résister aux pressions des gaz, et ne cède qu'au moment d'arrivée de la surface libre OB.

En 1956 WALSH et RICE (A 122) ont modifié la méthode pour l'appliquer aux liquides. Débarrassé de certains détails, introduits dans le souci d'une plus grande précision expérimentale, le principe en est le suivant (fig. 22) :

L'onde de choc traverse d'abord une plaque d'aluminium. A la surface libre

de cette plaque se trouvent un groupe A de cavités de même épaisseur ($\approx 1,5$ mm) remplies d'air, et un groupe B de cavités d'épaisseurs variables (de 0,5 à 2 mm) remplies du liquide que l'on veut étudier. Chacun des groupes est surmonté d'un complexe constitué par une feuille d'acier, une épaisseur d'argon, un bloc de plexiglass et une fente. Les détails sont donnés sur les figures 6b et 6c qui sont des coupes de la figure 6a. Une caméra à film ou à miroir tournant complète le dispositif expérimental. Le mouvement du film (du miroir) est indiqué sur la figure 6a.

Au passage de l'onde de choc, le groupe A donne lieu au phénomène suivant : le film enregistre les traces lumineuses dues aux parties supérieures de

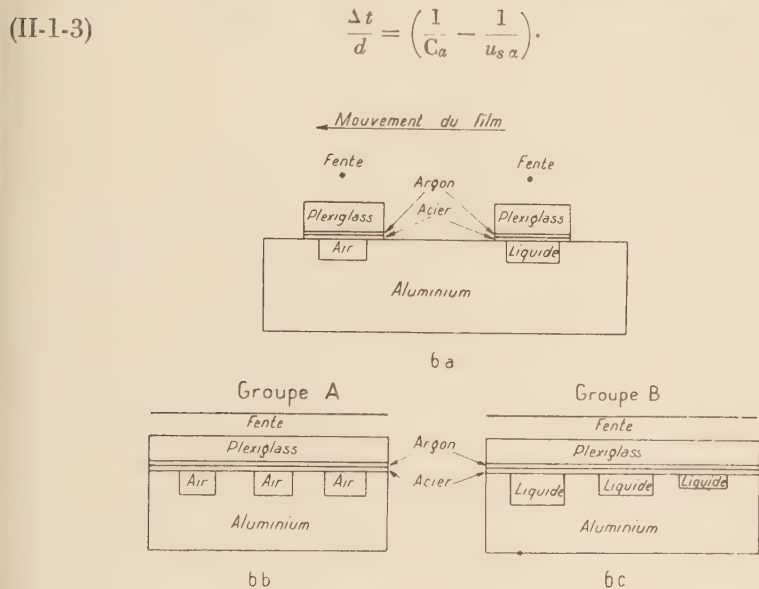


Fig. 22

la surface libre de la plaque d'aluminium et, avec un certain retard, les traces dues aux bases des fentes. Le retard enregistré est une conséquence directe de la différence entre la célérité de l'onde de choc dans l'aluminium et la vitesse de surface libre correspondante. Appelant d la profondeur de la fente, C_a et u_{sa} les deux vitesses impliquées, on a $\frac{\Delta t}{d} = \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{u_{sa}} \right).$

En joignant cette relation aux connaissances préalablement obtenues par la méthode WALSH-CHRISTIAN sur la célérité et la vitesse particulière dans l'aluminium, ces deux grandeurs peuvent être calculées.

Le groupe B donne lieu à un phénomène analogue. Les traces de la partie supérieure de la plaque d'aluminium sont encore dues à la propagation de l'onde de choc dans l'aluminium. Mais les traces, enregistrées à la hauteur des fentes, sont dues cette fois à la propagation de l'onde de choc dans le liquide. Appelons C_l la célérité de cette onde, d' la profondeur de l'une des fentes et

$\Delta' t$ le retard enregistré. Nous avons cette fois :

$$(II-1-4) \quad \frac{\Delta' t}{d'} = \left(\frac{1}{C_a} - \frac{1}{C_l} \right).$$

Ayant calculé C_a , nous en déduisons C_l . — La vitesse de surface libre n'est pas mesurée pour le liquide. En faisant appel aux propriétés de compressibilité de l'aluminium préalablement étudiées, il suffit en effet de connaître C_l pour pouvoir calculer la compressibilité du liquide, ainsi que la vitesse de surface libre. — Remarquons enfin qu'en principe les groupes de fentes A et B peuvent être réduits chacun à une seule fente. L'emploi de plusieurs fentes dans chaque groupe sert uniquement à s'assurer que l'onde n'est pas amortie sur le trajet impliqué dans la mesure et que par conséquent les valeurs obtenues sont des valeurs locales.

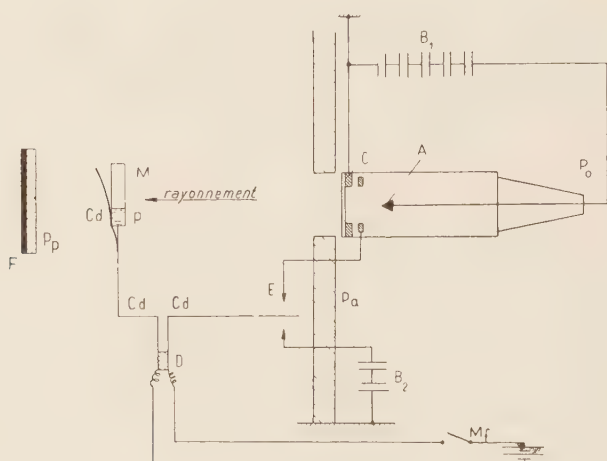


Fig. 23

- A. Anticathode de tungstène.
- C. Cathode.
- Z. Électrode auxiliaire.
- Po. Porcelaine isolante.
- E. Éclateur.
- D. Détonateur.
- Mf. Mise à feu.
- Pa. Paroi épaisse de protection.

- B1. Batterie de condensateurs de $0,06 \mu F$
- B2. Batterie de condensateurs de $0,05 \mu F$
- Cd, Cordeaux détonants.
- P. Charge de penthrite.
- M. Milieu à étudier.
- Pp. Plaque de protection.
- F. Film radiographique.

§ 2. Détermination expérimentale de la célérité C de l'onde et de la densité ρ

La méthode est essentiellement basée sur la radiographie instantanée. Elle a été utilisée pour la première fois par SCHALL (A, 95 A 96) et nous l'avons reprise au Laboratoire des Hautes Pressions (A 16). Sur la théorie du fonctionnement du tube à rayons X subsistent un certain nombre d'incertitudes. Nous ne nous arrêtons pas à cette question, renvoyant le lecteur qu'elle

intéresserait à notre article du *Journal de Recherches du C.N.R.S.* (A 16-2), à la suite duquel nous donnons un certain nombre de références.

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 23. La synchronisation entre le déclenchement du tube à rayons X et la création de l'onde de choc se fait très simplement au moyen de deux longueurs de cordeau détonant, dont l'une commande un éclateur relié au tube, l'autre amorçant l'explosif principal. Le cordeau de penthrite que nous employons a une vitesse de détonation de 6 millimètres par microseconde et, compte tenu de certaines irrégularités incontrôlables dans le fonctionnement du tube, nous pouvons régler les temps à environ 0,5 microseconde près.

La durée de l'éclair X est de l'ordre de 0,2 microseconde, durée pendant laquelle les ondes de choc très intenses, que nous avons obtenues, se déplacent d'un peu plus d'un millimètre. La netteté des images obtenues est ainsi satisfaisante, comme le montrent les quelques clichés qui figurent au chapitre suivant. On y voit un front d'onde très précis, suivi d'une zone d'épaisseur variable, mais ne descendant jamais au-dessous de 4 à 5 millimètres. Dans cette zone un état uniforme de la matière peut donc être postulé sans grand risque. Au-delà l'expansion radiale de la matière, ainsi que l'affaiblissement par l'arrière deviennent notables.

La célérité de l'onde de choc est déduite de la courbe trajet-temps. Cette dernière s'obtient à partir d'une série d'expériences situant l'onde à différents instants de sa course. Le temps est lu sur une longueur de cordeau détonant gradué par les anneaux de plomb à partir du plan de séparation initial entre l'explosif et le métal. La distance parcourue par l'onde est lue par rapport à une échelle de plomb fixée sur l'échantillon. La précision sur le temps est de la sorte de l'ordre de 0,2 microseconde (1, 2 mm), celle sur la distance est d'environ 1 millimètre. Il serait illusoire d'exiger une plus grande précision sur la position, en raison du flou de l'image inévitable par suite de la durée finie de l'éclair.

L'étude photométrique des clichés donne la densité. La loi d'absorption des rayons X s'écrit :

$$(II-2-1) \quad I = I_0 e^{-\mu x}.$$

I étant l'intensité transmise, I_0 l'intensité incidente, x l'épaisseur traversée, μ le coefficient d'absorption.

Ce dernier dépend à la fois de la longueur d'onde λ , du nombre atomique Z de la substance et de la densité ρ . Pour les rayons X la loi d'absorption s'écrit :

$$(II-2-2) \quad \mu = \left[a\lambda^3 Z^3 + b + \frac{0,2}{1 + \frac{0,048}{\lambda}} \right] \rho.$$

Cette loi reste vraie aussi longtemps que l'accroissement de densité ne perturbe pas les couches électroniques internes, et la théorie prévoit que tel est le cas jusqu'à des pressions d'environ 16.10^6 kg/cm².

Lorsque plusieurs corps se combinent pour former un composé chimique, on obtient le coefficient d'absorption spécifique du composé par l'expression

simple suivante les m_i étant les poids atomiques des composants :

$$(II-2-3) \quad \frac{\mu}{\rho} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\sum_{k=1}^n m_k} \left(\frac{\mu_i}{\rho_i} \right).$$

Il vient donc, pour n'importe quel corps :

$$(II-2-4) \quad I = I_0 e^{-\frac{\mu}{\rho} \rho \cdot x}.$$

Dans le cas d'un rayonnement non-monochromatique enfin, il existe un $\frac{\mu}{\rho}$ moyen qui est encore indépendant de la densité.

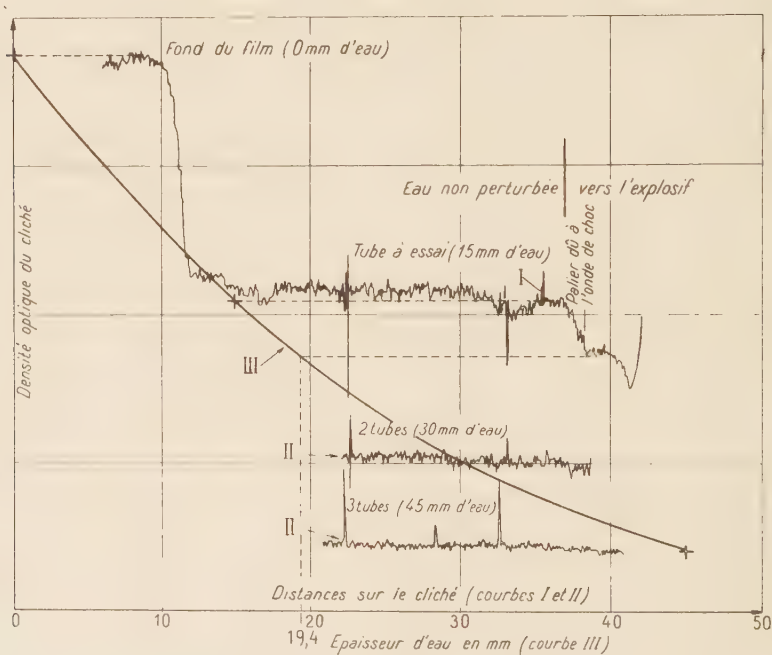


Fig. 24

L'expression (II-2-4-) montre alors que, pour une substance donnée, on aura le même pouvoir absorbant dans deux épaisseurs x_1 et x_2 pourvu que les densités correspondantes satisfassent à la relation :

$$(II-2-5) \quad \rho_1 x_1 = \rho_2 x_2$$

Il suffira donc, pour connaître la densité d'une tranche de substance d'épaisseur connue, de comparer son pouvoir d'absorption à ceux d'une série de

tranches de même densité, connue, et d'épaisseurs variables, connues. Ce résultat est obtenu par l'étude microphotométrique comparée de l'absorption des rayons X dans l'échantillon qui porte l'onde de choc et dans une série d'échantillons de la même substance et d'épaisseurs variables (fig. 24).

§ 3. Pour terminer ce chapitre, je voudrais dire encore un mot de l'emploi des ondes de choc à front incurvé dans l'étude des propriétés de compressibilité des substances par onde de choc. De telles ondes ont été utilisées par Sam KATZ (travaux non publiés) et par SCHALL et THOMER (A 96-1). Le but de ces deux derniers auteurs était d'obtenir des rencontres d'ondes de choc et d'atteindre ainsi des pressions élevées. Mais dans leur travail ils ne présentent

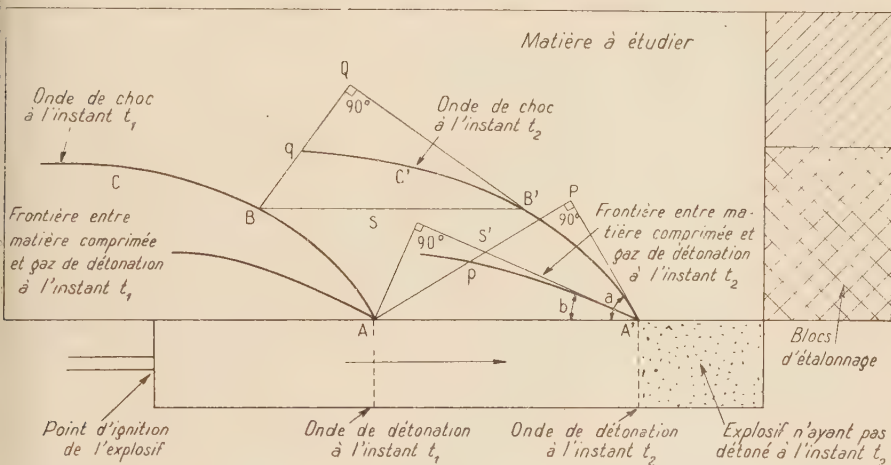


Fig. 25

pas de discussion quantitative de leurs résultats. Le but principal de nos recherches était par contre d'obtenir à partir d'une seule onde de choc des renseignements sur la compressibilité de la substance dans un domaine étendu (A 16-5). Un tel résultat peut évidemment être obtenu en principe par la méthode des sondes. Il suffit de répartir les sondes sur un trajet suffisamment étendu de l'onde de choc. Mais en pratique cela conduit à utiliser un très grand nombre de sondes, et par conséquent à des dimensions prohibitives pour l'ensemble explosif-substance.

Le principe de la méthode que nous avons employée est le suivant (fig. 25) :

Un bâton d'explosif est allumé à son extrémité gauche et donne naissance à une onde de choc dans le milieu. En raison de l'amortissement, le front de cette onde est incurvé (front d'onde A B C), mais comme l'onde de détonation dans sa progression de la gauche vers la droite recrée constamment le même état le long de l'axe de détonation, le front d'onde de choc se déplace sans se déformer dans le même sens et occupe à l'instant t la position $A^1 B^1 C^1$. La radiographie peut donc être prise de n'importe quelle phase du phénomène.

Un tel cliché donne immédiatement la célérité de l'onde au point A d'intensité maximum. Considérant deux instants t^1 et t^2 infiniment rapprochés, la célérité de l'onde en A est en effet proportionnelle au segment AP, la vitesse de détonation D supposée connue, étant proportionnelle au segment AA¹. On a donc la relation :

$$(II-3-1) \quad C = D \sin \alpha,$$

Comme la densité en A peut, d'autre part, être déterminée comme d'habitude, une seule radiographie donne le couple pression-volume dans la tête de l'onde.

Mais le raisonnement qui nous a donné la célérité de la tête A, s'applique à n'importe quel autre point B du front d'onde (triangle BB¹Q). Tout le long de ABC la célérité de l'onde est donc donnée par (II-3-1), α étant l'angle formé au point en question par la tangente à ABC avec l'axe de détonation (angle $\sim \frac{\pi}{2}$). Comme la densité peut également être mesurée tout au long de ABC, on voit qu'un seul cliché donne la courbe de compressibilité totale à partir de la pression maximum réalisée en A.

Dans la tête A de l'onde il est cependant difficile de mesurer avec précision la densité, en raison de l'épaisseur quasi nulle de la matière comprimée. Il est donc intéressant de remarquer qu'en ce point la vitesse particulière v peut être évaluée. Les radiographies font en effet apparaître la surface de séparation entre matière comprimée et gaz de détonation. La vitesse particulière est alors proportionnelle au segment AS¹ et la considération des triangles AS¹A¹ et AS¹A conduit à la valeur :

$$(II-3-2) \quad u = \frac{\sin b}{\cos(a-b)}.$$

Connaissant C et u , les relations d'HUGONIOT donnent à nouveau dans la tête A de l'onde le couple pression-volume.

La vitesse particulière peut évidemment être calculée par l'expression (II-3-2) tout le long de la surface de séparation mentionnée, mais il faut se rappeler que, sauf en A, il s'agit de particules qui se trouvent à une certaine distance derrière le front d'onde et que par conséquent il n'est pas possible d'obtenir ainsi la pression et le volume en un autre point que A. La mesure directe de la densité est nécessaire.

CHAPITRE III

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

M. DAPOIGNY avait pratiquement achevé ses recherches expérimentales sur l'eau, lorsque je fus amené à m'occuper de la question des ondes de choc (A 16-1). Ses résultats concordaient de manière satisfaisante avec ceux obtenus auparavant par SCHALL au laboratoire de Saint-Louis (A 95-1). Deux questions se posèrent alors à nous. Quelle est la température de l'eau au sortir de l'onde de choc? Y a-t-il possibilité de solidification partielle ou totale de l'eau au passage de l'onde de choc? Comme la réponse à cette dernière question dépend en grande partie de la température, on voit que les deux questions sont en dépendance étroite l'une de l'autre.

Nous avons eu l'occasion de rappeler à plusieurs reprises que, notre méthode expérimentale nous donnant la célérité de l'onde et la densité du milieu, les deux premières relations d'HUGONOT permettent de calculer la pression. Dès lors il suffit de connaître une équation d'état pour en déduire la température. Diverses équations d'état, plus ou moins empiriques, ont été proposées pour l'eau. Rappelons celles de TAIT (L 11) et de BURCKHART (A 129). Mais comme ces équations ne peuvent se prévaloir d'une déduction théorique irréprochable, il nous a paru plus sûr de procéder à une comparaison directe avec les résultats expérimentaux de BRIDGMAN. La figure 26 montre le résultat de cette comparaison. Afin d'avoir un diagramme d'une lecture plus commode nous nous sommes placés dans le plan volume-température. Nous y avons porté (fig. 27) les courbes de solidification et de fusion de l'eau, ainsi que les isobares de BRIDGMAN, déduites des isothermes. La figure donne en outre l'adiabatique dynamique expérimentale que nous avons obtenue ainsi que les deux adiabatiques dynamiques calculées par les équations d'état de TAIT et de BURCKHART. L'écart entre ces trois courbes est assez considérable et s'explique par la très grande sensibilité de la température aux moindres variations de volume. L'estimation des températures ainsi faite, donne donc au mieux un ordre de grandeur. Quoiqu'il en soit, si nous prenons comme base notre adiabatique dynamique expérimentale, nous voyons qu'une pression de 50 000 kg/cm² donne une élévation de température d'environ 350°. Quant à savoir s'il y a solidification de l'eau ou non, la réponse dépend de l'adiabatique dynamique que nous adoptons. La nôtre, et celle de BURCKHART, ne font pas prévoir de solidification, puisqu'elles ne rencontrent à aucun moment la courbe de solidification. L'adiabatique dynamique obtenue à partir

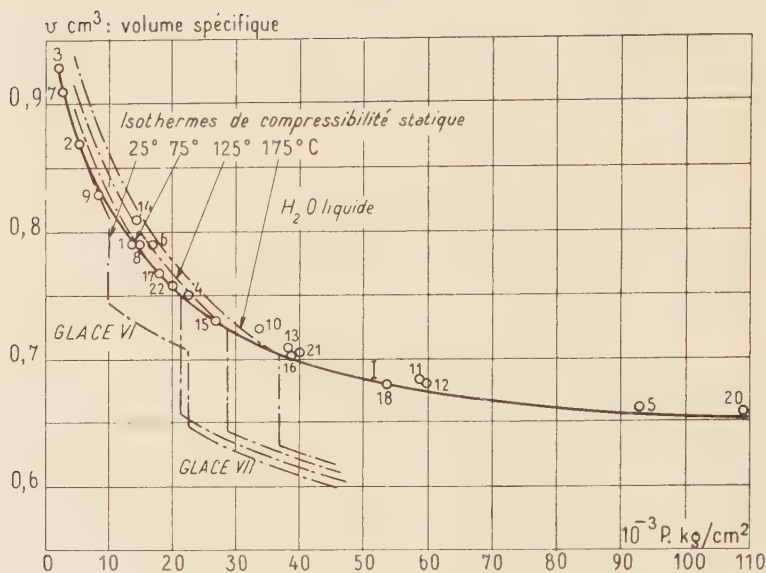


Fig. 26. — Compressibilité par ondes de choc de l'eau.

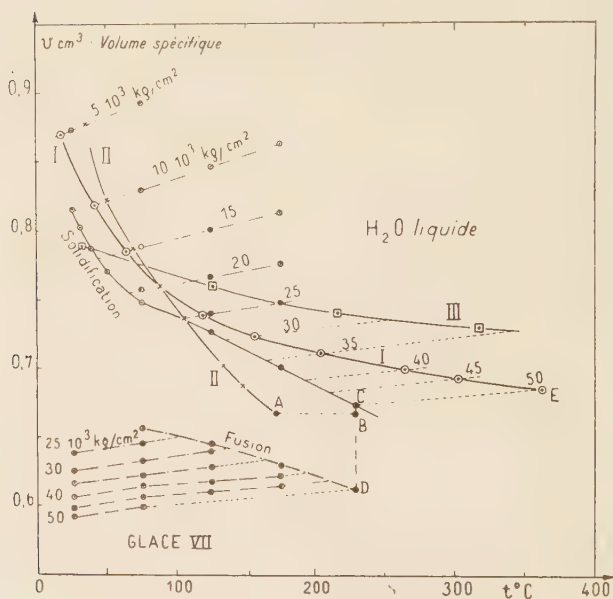


Fig. 27. — Diagramme volume température

- I. Estimation de la t^0 dans l'ordre selon les données de BRIDGMAN.
- II. Température calculée selon l'équation de TAIT (Kirkwood).
- III. Température calculée par BURKHARDT.



—○—○—○— Compression statique (BRIDGMAN).

..... Compression statique (extrapolation).

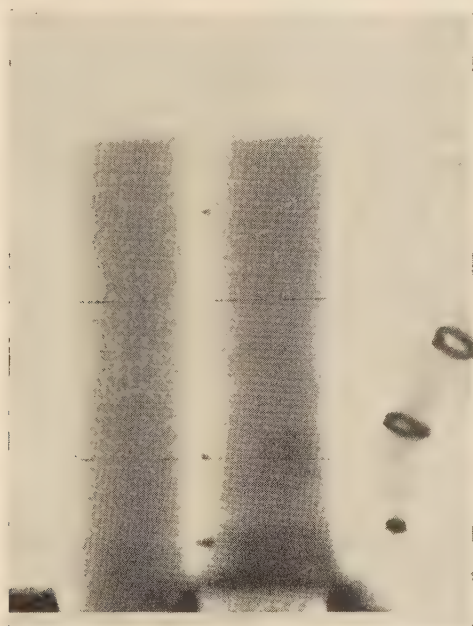


Fig. 28. — Onde de choc dans l'eau

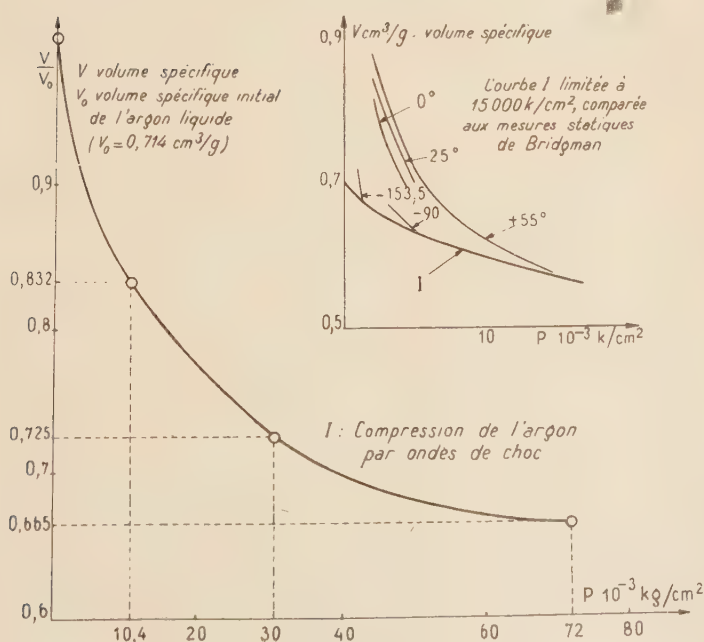


Fig. 29

de l'équation de TAIT semble indiquer par contre une solidification partielle. Mais même dans ce cas les quantités de liquide solidifiées sont faibles puisqu'au point maximum A de la courbe (correspondant à une pression de 50 000 kg/cm²) le rapport des masses solides aux masses liquides est mesuré par BC/BD. De toute manière la question, pour recevoir une réponse satisfaisante, doit être élargie. Il ne suffit pas, en effet, que la température permette une solidification pour que celle-ci se fasse. Il faut encore que la pression se maintienne pendant une durée suffisante pour que la solidification puisse se faire. La question intéresse donc la cinétique des transformations et nous n'avons pas songé à la résoudre.

La figure 28 montre la radiographie d'une onde de choc correspondant à une pression de 18 000 kg/cm² et à une compression de $v/v_0 = 0,77$.

Nous avons ensuite établi les adiabatiques dynamiques de deux gaz liquéfiés, argon (A 16-3) et oxygène (A 16-4). Les figures 29 et 30 donnent les résultats. Une comparaison avec les données de BRIDGMAN, dans le cas de l'argon, montre que l'élévation de température est beaucoup plus rapide que dans le cas de l'eau. C'est ainsi qu'une onde de choc d'environ 15 000 kg/cm² donne un accroissement de température de 250°. Nous avons essayé de nous rendre compte de l'échauffement pour des compressions plus fortes pour lesquelles les données de BRIDGMAN font défaut. A cet effet nous avons fait appel à une équation d'état théorique (A 7), basée sur un potentiel LENNARD-JONES 6-12, et préconisée par WENTORF (A 137) pour les gaz liquéfiés. Les températures ont été calculées de deux manières différentes :

1° Les points d'intersection de l'adiabatique dynamique avec les isothermes théoriques ont été déterminés dans le plan pression-volume (fig. 31).

2° Ces points d'intersection ont été déterminés dans le plan énergie-volume, en utilisant la troisième relation d'HUGONOT (fig. 32). Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

TABLEAU

ρ	P	T ₁	T ₂
cm ³ /g	kg/cm ²	°K	°K
0,714	1	//	//
0,594	10 400	250	280
0,518	30 000	480	550
0,475	72 000	1 450	1 380

On voit que l'accord est assez bon. Ce qui semble indiquer que l'équation d'état utilisée décrit bien les propriétés de l'argon liquide et que l'adiabatique dynamique expérimentale est correcte.

Remarquons enfin que, dans le cas de l'argon et de l'oxygène, l'onde de choc fait passer ces liquides à l'état hypercritique où il n'est plus possible de distinguer entre le liquide et le gaz.

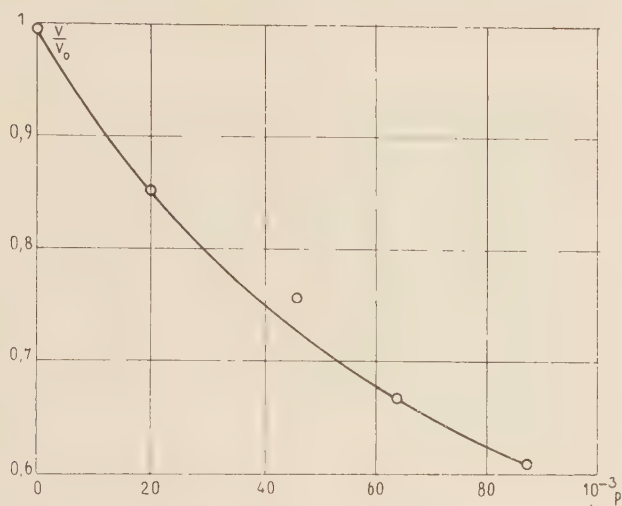


Fig. 30

Adiabatique dynamique de l'oxygène liquide $V=0,062$.
Volume spécifique à p atmosphériques et T en ébullition.

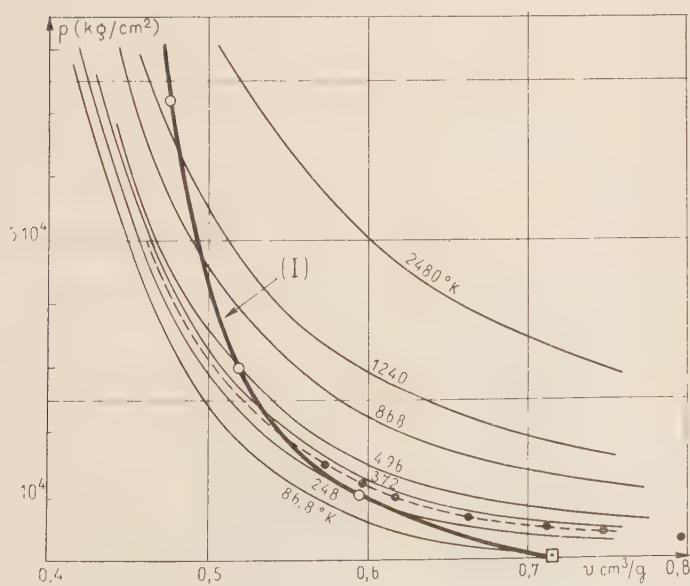


Fig. 31

Compressibilité de l'argon par ondes de choc (I)
et isothermes de compressibilités théoriques.

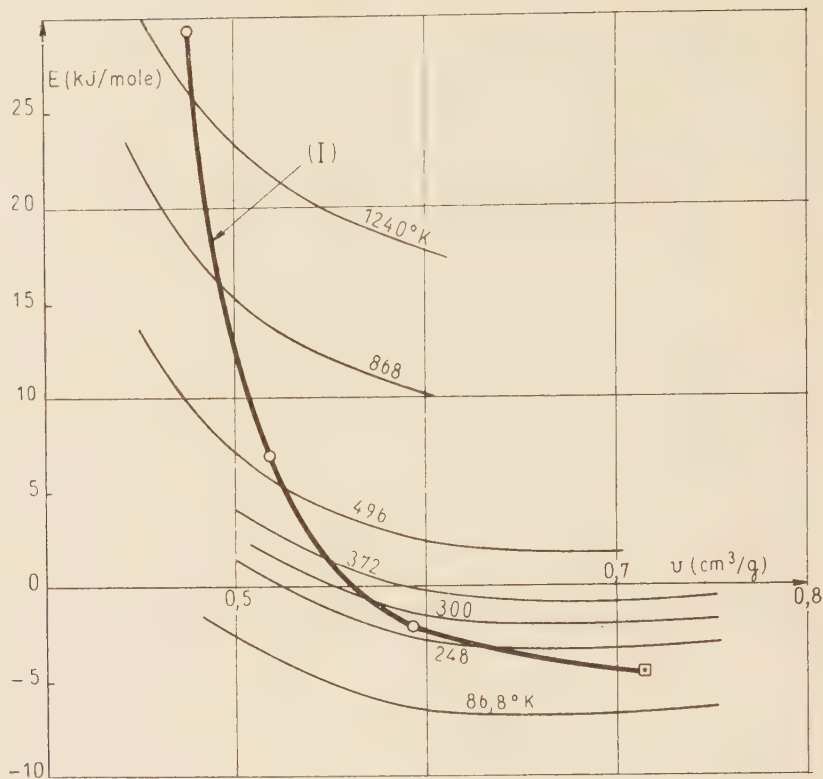


Fig. 32

Énergie de l'argon comprimé par onde de choc (I)
et énergie de l'argon d'après le modèle théorique de LENNARD-JONES.

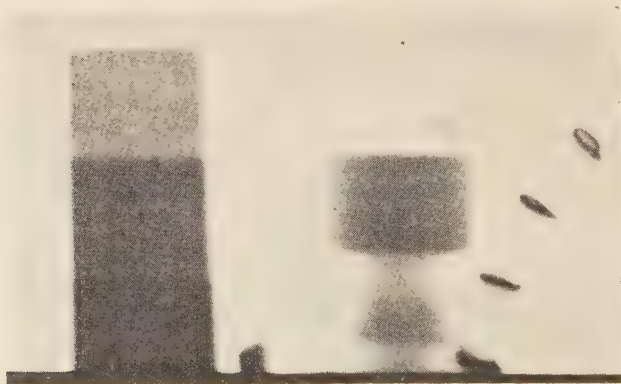


Fig. 33. — Onde de choc dans le plexiglass

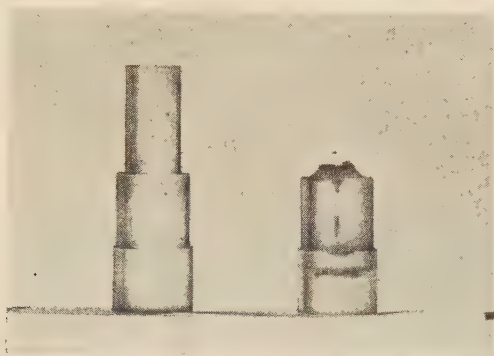


Fig. 34



Fig. 35

Courbe de compression du polyméthacrylate de méthyle.

- I. Courbe obtenue par la méthode des ondes de choc planes utilisant une série de clichés.
- II. Courbe obtenue par la méthode d'une onde latérale.

Je terminerai en mentionnant les résultats obtenus sur le plexiglass (A 16-5,6). En raison de son faible coefficient d'absorption pour les rayons X, ce solide se prête parfaitement à l'étude des ondes de choc par radiographie instantanée. Les figures 33 et 36 montrent les radiographies d'une onde de choc plane et d'une onde de choc oblique. La figure 35 donne les résultats. La courbe I est obtenue par une série d'ondes de choc planes; la courbe II est déduite de l'onde de choc oblique unique reproduite sur la figure 36. La figure 34 montre enfin un échantillon de plexiglass avant et après l'expérience. Deux fractures y sont

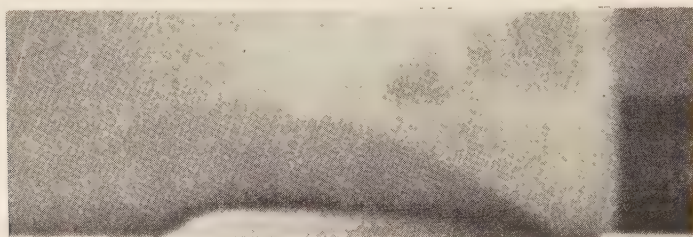


Fig. 36. — Onde de choc oblique dans le plexiglass

très visibles. L'une est située dans le cylindre de diamètre maximum et est parallèle à la base du cylindre. Une telle fracture est la conséquence de la réflexion de l'onde de compression incidente sur le front du cylindre et a été décrite par RINEHART (A 89) sous le nom de « scabbing ». L'autre fracture est située sur l'axe du cylindre de diamètre intermédiaire. Elle a été expliquée par KOLSKY (L 23, A 53-1, A 54) de la manière suivante : une onde de compression divergente, réfléchiée sur la paroi latérale, est transformée en onde de tension convergente; sur l'axe la limite élastique en traction est dépassée, et une fracture apparaît. Dans notre cas l'onde de compression divergente, serait produite par le passage brusque de l'onde plane incidente du cylindre de diamètre minimum dans celui de diamètre intermédiaire.

BIBLIOGRAPHIE

Livres (L)

1. LAMB (H.). — *Hydrodynamics*, Cambridge, Première édition 1879, dernière édition 1932.
2. POYNTING (J. H.) et THOMSON (J. J.). — *Properties of Matter*, London, 1902.
3. HADAMARD (J.). — *Leçons sur la Propagation des Ondes et les Équations de l'Hydrodynamique*, Hermann, Paris 1903.
4. LOVE (A. E. H.). — *Elasticity*, Cambridge, Première édition 1906, dernière édition 1927.
5. VOIGT (W.). — *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner, 1910.
6. JOUGUET (E.). — *Mécanique des Explosifs*, O. Doin et fils, Paris, 1917.
7. LEVI-CIVITÀ (T.). — *Caractéristiques des Systèmes différentiels et Propagation des Ondes*, Paris, 1932.
8. HOUWINK (R.). — *Elasticity, Plasticity and Structure of Matter*, 1937, Cambridge, nouvelle édition 1954.
9. BRILLOUIN (L.). — *Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité*, Masson, Paris, 1938.
10. BRILLOUIN (L.). — *Wave Propagation in Periodic Structure*, Mac-Graw-Hill U.S.A., 1946.
11. COLE (R.). — *Underwater Explosions*, Princeton University Press, 1948.
12. COURANT (R.), FRIEDRICHS (K. O.). — *Supersonic Flow and Shock waves*, Interscience Publishers inc. New York, 1948.
13. ZENER (C.). — *Elasticity and Anelasticity of Metals*, Chicago University Press, 1948.
14. REINER (M.). — *Twelve Lectures on Theoretical Rheology*, North Holland Publ. CO. Amsterdam, 1949.
15. LEWIS (H. K.). — *Deformation and Flow*, London, 1949.
16. BIRKHOFF (G.). — *Hydrodynamics*, Princeton University Press, 1950.
17. HILL (R.). — *Plasticity*, Oxford, 1950.
18. ANDRADE (C.). — *Viscosity and Plasticity*, Chemical Publishing Co. Inc. 212, Fifth Avenue, New York, 1951.
19. MURNAGHAN (F. D.). — *Finite Deformation of an Elastic Solid*, John Wiley and s. New York, 1951.
20. PRAGER (W.), HODGE (P. G.). — *Theory of Perfectly Plastic Solids*, John Wiley and Sons, New York, 1951.
21. TAYLOR (J.). — *Detonation in Condensed Explosives*, Oxford, 1952.
22. NOVOZHILOV (V. V.). — *Foundations of the Non-Linear Theory of Elasticity*, Graylock Press, Rochester (N. Y.), 1953.
23. KOLSKY (H.). — *Stress Waves in Solids*, Oxford, 1953.
24. GROSS (B.). — *Mathematical Theories of Viscoelasticity*, Hermann, Paris, 1953.
25. GREEN (A. E.), ZERNA (W.). — *Theoretical Elasticity*, Oxford, 1954.

26. RINEHART (J.), PEARSON (J.). — *Behavior of Metals under Impulsive Loads*, American Society for Metals, Cleveland, Ohio, 1954.
27. *Deformation and Flow of Solids*, IUTAM Colloquium, Madrid, 1955, Springer-Verlag, Berlin, 1956.
28. *Elastizität und Plastizität*, Handbuch der Physik, VI, Berlin, 1958.
29. EIRICH (F. R.). — *Rheology*, Academic Press Inc. Publ. New York, 1956.
30. *Conference on the Properties of Materials at very high rates of strain*. The Institution of Mechanical Engineers, London, 30 avril-2 mai 1957.

Appendice

BRILLOUIN (L.). — *Les tenseurs en mécanique et en élasticité* (Masson).

LICHNEROWITZ (A.). — *Algèbre et analyse linéaires* (Masson).

LICHNEROWITZ (A.). — *Éléments de calcul tensoriel* (Colin).

BAUER (E.). — *Champs de vecteurs et de tenseurs* (Masson).

Bibliographie chronologique (H)

1. FOURCROY-VAUQUELIN. — « Expériences sur les détonations par le choc », *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1^{re} série, 2, An VII, p. 31-39.
2. YOUNG. — *A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts*, London (Nouvelle édition en 1845).
3. POISSON. — « Mémoire sur la théorie du son » (lu le 17 août 1807 à l'Académie), *Journal de l'École polytechnique*, 7, 1808, p. 319-392.
4. POISSON. — « Mémoire sur la théorie des ondes » (lu en 1815), *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 2^e série, I, 1818, p. 71-186.
5. CAUCHY. — « Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie » (lu en 1815), *Œuvres I*, 1, p. 4-318. Notes p. 115-318.
6. POISSON. — « Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques » (lu en 1819), *Mémoires de l'Académie*, 2^e série, 3, 1820, p. 121-176.
7. NAVIER. — « Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques ». (lu le 14 mai 1821), *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 2^e série, 7, 1827, p. 375-394.
8. NAVIER. — « Mémoire sur les lois du mouvement des fluides » (lu en 1822), *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 2^e série, 6, 1827, p. 389-440.
9. NAVIER. — « Sur les lois des mouvements des fluides, en ayant égard à l'adhésion des molécules », *Annales de Chimie et de Physique*, 19, 1821, p. 244-260.
10. POISSON. — « Sur la vitesse du son », *Annales de Chimie et de Physique*, 23, 1823, p. 3-16.
11. CAUCHY. — « Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques » (lu en 1823), *Œuvres II*, 2, p. 300-305.
12. CAUCHY. — « Mémoire sur le choc des corps élastiques » (lu en 1826), *Œuvres II*, 2, p. 323-329.
13. NAVIER. — « Expériences sur la résistance de diverses substances à la rupture causée par une tension longitudinale », *Annales de Chimie et de Physique*, 33, 1826, p. 225-240.
14. CAUCHY. — « Recherche des équations générales d'équilibre pour un système de points matériels assujettis à des liaisons quelconques » (lu en 1827), *Œuvres II*, 7, p. 11-37.
15. CAUCHY. — « Sur la condensation et la dilatation des corps solides » (lu en 1827), *Œuvres II*, 7, p. 82-94.

16. CAUCHY. — « Sur quelques théorèmes relatifs à la condensation ou à la dilatation des corps » (lu en 1828), *Œuvres II*, 8, p. 278-288.
17. POISSON. — « Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques » (lu en 1828), [note ajoutée p. 623-627], *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 2^e série, 8, p. 357-570.
18. POISSON. — « Mémoire sur l'équilibre des fluides » (lu en 1828), *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 2^e série, 9, 1830, p. 1-88.
19. POISSON. — « Note sur le problème des ondes » (lu en 1828), *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 2^e série, Paris, 8, 1829, p. 571-580.
20. POISSON. — « Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques » (lu en 1828), *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 2^e série, 10, 1831, p. 549-606.
21. CAUCHY. — « Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement des fluides » (lu en 1828), *Œuvres II*, 8, p. 158-180.
22. CAUCHY. — « Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique » (lu en 1828), *Œuvres II*, 8, p. 195-227.
23. CAUCHY. — « Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle » (lu en 1828), *Œuvres II*, 8, p. 227-253.
24. CAUCHY. — « Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues » (lu en 1828), *Œuvres II*, 9, p. 342-373.
25. CAUCHY. — « Sur les équations différentielles d'équilibre ou de mouvement pour un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle » (lu en 1829), *Œuvres II*, 9, p. 162-174.
26. CAUCHY. — « Sur les diverses méthodes à l'aide desquelles on peut établir les équations qui représentent les lois d'équilibre ou le mouvement intérieur des corps solides ou fluides » (lu en 1830), *Œuvres II*, 2, p. 134-143.
27. LAMÉ-CLAUPEYRON. — *Mémoire sur l'équilibre interne des corps solides homogènes*, Mémoires présentés par divers savants, 2^e série, 4, 1833, p. 463-562.
28. POISSON. — « Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés » (lu en 1839), Paris, *Mémoires de l'Académie* (2^e série, 18, 1842, p. 3-152.
29. CAUCHY. — « Note sur la nature des ondes lumineuses et généralement de celles qui se propagent dans les systèmes de molécules » (lu en 1839), *Œuvres I*, 4, p. 322-331.
30. CAUCHY. — « Mémoire sur les deux espèces d'ondes planes qui peuvent se propager dans un système isotrope de points matériels » (lu en 1840), *Œuvres II*, 11, p. 354-399.
31. CAUCHY. — « Mémoire sur la réflexion et la réfraction d'un mouvement simple transmis d'un système de molécules à un autre » (lu en 1839), *Œuvres I*, 4, p. 429-483.
32. CAUCHY. — « Mémoire sur la réflexion et la réfraction d'un mouvement simple... » (lu en 1840), *Œuvres II*, 11, p. 173-227.
33. CAUCHY. — « Considérations nouvelles relatives à la réflexion et à la réfraction des mouvements simples » (lu en 1840), *Œuvres I*, 5, p. 120-135.
34. CAUCHY. — « Trois mémoires sur les dilatations, les condensations et les rotations produites par un changement de forme dans un système de points matériels », 1841 : *Œuvres complètes*, 12, (1^e série), p. 343-378; 1842 : *Œuvres I*, 7, p. 234-235 et p. 235-246.
35. STOKES. — « On the theories of the equilibrium and motion of elastic solids », *Transactions of the Cambridge Philosophical Soc.*, 8, 1845 (repr. *Math. and Phys. Pap.*, de Stokes, 1880, tome I, p. 75).
36. CAUCHY. — « Mémoires sur le mouvement d'un système de molécules », (1848), *Œuvres I*, 11, p. 64-71.
37. CHALLIS. — « Propagation du son dans l'air », *Philosophical Magazine*, 3^e série, 32, p. 276, p. 434, 33, p. 98, 34, p. 284, p. 353, p. 449, p. 512, 35, p. 241, 36, p. 295.
38. STOKES. — « Propagation du son dans l'air », *Philosophical Magazine*, 32, p. 343, 33, p. 349, 34, p. 52, p. 203, p. 348, p. 501.
39. AIRY. — « Propagation du son dans l'air », *Philosophical Magazine*, 32, p. 339, 34, p. 401.

40. CLAUDE. — « Über die Veränderungen welche in den bisher gebräuchlichen Formeln für das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer Körper durch neue Beobachtungen notwendig geworden sind », *Annalen für Physik und Chemie* (Poggendorff), 76, 1849, p. 46.
41. KIRCHHOFF. — « Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe », *Journal für reine und angewandte Mathematik* (Crelle), 40, 1850, p. 51-88.
42. KIRCHHOFF. — « Über die Gleichungen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Teile », *Wiener Berichte* (Math. Naturw. Kl.), 9, 1852, p. 762-773.
43. KIRCHHOFF. — « Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes » (reproduit in *Abhandlungen über mathematische Physik*, troisième édition, Leipzig 1883), *Journal für reine und angewandte Mathematik* (Crelle), 56, 1859, p. 283-313.
44. RIEMANN. — « Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite », *Göttinger Nachrichten*, 8, 1858-1859, p. 43, Traduction française de ses œuvres, p. 477.
45. EARNSHAW. — « On the mathematical theory of sound », *Proceedings of the Royal Society*, 6, 1859, p. 590-591.
46. EARNSHAW. — « On the mathematical theory of sound », *Philosophical Transactions*, 1860, p. 133-148.
47. MEYER. — « Über die Reibung der Flüssigkeiten (Theorie) », *Journal für reine und angewandte Mathematik* (Crelle), 59, 1861, p. 229-303 (complément dans 62, p. 201-214).
48. THOMSON (Lord KELVIN). — « On the elasticity and viscosity of metals », *Proceedings of the Royal Society of Metals*, London, 14, 1865, p. 289.
49. TRESCA. — « Mémoire sur l'écoulement des corps solides », (lu le 7 novembre 1864), *Mémoires présentés par divers savants*, 2^e série, 18, 1868, p. 733-799.
50. TRESCA. — « Mémoire sur l'écoulement des corps solides » (lu en 1867), *Mémoires présentés par divers savants*, 2^e série, 20, 1872, p. 75-135 (complément pp. 281-286).
51. TRESCA. — « Mémoire sur le poinçonnage des métaux » (lu en 1869), *Mémoires présentés par divers savants*, 2^e série, 20, 1872, p. 617-838.
- TRESCA. — « Mémoire sur le poinçonnage et la théorie mécanique de la déformation des métaux », *Comptes rendus*, 68, 1869, p. 1197-1201.
- TRESCA. — « Mémoire sur le poinçonnage des métaux et des matières plastiques », *Comptes rendus*, 70, 1870, p. 27-31.
52. SAINT-VENANT. — « Sur le choc longitudinal de deux barres élastiques », *Journal de Mathématiques* (Liouville), 2^e série, 12, 1867, p. 237-377.
53. BOUSSINESQ. — « Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés », *Journal de Mathématiques* (Liouville), 2^e série, 13, 1868, p. 209-242.
54. BOUSSINESQ. — « Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides », *Journal de Mathématiques* (Liouville), 2^e série, 13, 1868, p. 377-425.
55. MAXWELL. — « On the dynamical theory of gases », *Philosophical Magazine* (4), 35, 1868, p. 129-217.
56. RANKINE. — « On the thermodynamic theory of finite longitudinal disturbances », *Philosophical Transactions*, 160, 1870, p. 277-288.
57. LÉVY. — « Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au-delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état » (Résumé), *Comptes rendus*, 70, 1870, p. 1323, ou *Journal de Mathématiques* (Liouville), 2^e série, 16, 1871, p. 369-372.
58. SAINT-VENANT. — « Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps ductiles au-delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état », *Comptes rendus*, 70, 1870, p. 473, ou *Journal de Mathématiques* (Liouville), 2^e série, 16, 1871, p. 308-317.
59. HOPKINSON. — « On the rupture of an iron wire by a blow », *Proceeding of the Manchester Literary and Philosophical Society*, 11, 1872, p. 40.

60. HOPKINSON. — « Further experiments on the rupture of iron wires », *idem* ci-dessus, p. 119.
61. MEYER. — « Zur Theorie der inneren Reibung », *Journal für reine und angewandte Mathematik* (Crelle), 78, 1874, p. 130 (complément 80, p. 315).
62. MACH. — « Über einige Wirkungen des elektrischen Funkens », *Wiener Berichte*, 72, 1875, 73, 1876, 75, 1877, 77, 1878.
63. BERTHELOT. — « Sur la vitesse de propagation des phénomènes explosifs dans les gaz », *Comptes rendus*, 93, 1881, p. 18-23.
64. MALLARD-LE CHATELIER. — « Sur les vitesses de propagation de l'inflammation dans les mélanges gazeux explosifs », *Comptes rendus*, 93, 1881, p. 145-148.
65. HERTZ. — « Über die Berührung fester elastischer Körper », *Journal für reine und angewandte Mathematik* (Crelle), 92, 1882, p. 156-171.
66. VOIGT. — « Die Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Stäbe », *Annalen der Physik und Chemie* (Wiedemann), 19, 1882, p. 44-66.
67. BERTHELOT. — « Sur l'onde explosive », *Comptes rendus*, 94, 1882, p. 149-152.
68. BERTHELOT. — « Sur la vitesse de l'onde explosive », *Comptes rendus*, 96, 1883, p. 672-673.
69. BERTHELOT. — *Sur la force des matières explosives*, Gauthier-Villars, Paris, 1883.
70. HAUSMANINGER. — « Zur Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Körper », *Annalen der Physik und Chemie* (Wiedemann), 25, 1885, p. 189-203.
71. BELTRAMI. — « Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici », *Rendiconti del Istituto Lombardo*, série II, 18, 1885, p. 704-714.
72. HUGONOT. — « Mémoire sur la propagation des mouvements dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits » (lu le 26 octobre 1885), *Journal de l'École polytechnique*, 57, 1887, p. 3-97, 58, 1888, p. 1-125.
73. HUGONOT. — « Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4, (3), 1887, p. 477-492.
74. VOIGT. — « Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle », *Göttinger Nachrichten*, 34, 1887, p. 53-100.
75. VOIGT. — « Über die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper », *Annalen der Physik und Chemie* (Wiedemann), 38, 1889, p. 573-587.
76. VOIGT. — « Über die innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Kristalle », *Göttinger Nachrichten*, 36, 1890, p. 1-47.
77. VOIGT. — « Über innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle », *Annalen der Physik*, 47, 1892, p. 671-693.
78. BRILLOUIN. — « Déformations homogènes finies. Énergie d'un corps isotrope », *Comptes rendus*, 112, 1891, p. 1500.
79. VOIGT. — « Bestimmung der Constanten der Elastizität und Untersuchung der inneren Reibung für einige Metalle », *Göttinger Nachrichten*, 38, 1892.
80. BOYS. — « Photography of flying bullets », *Nature*, 47, 1893, p. 440-446.
81. DIXON. — « The rate of explosions in gases », *Philosophical Transactions A*, 184, 1894, p. 97-189.
82. SCHUSTER. — « Étude de la détonation », *Philosophical Transactions A*, 184, 1894.
83. VOIGT. — « Über eine anscheinend notwendige Erweiterung der Theorie der Elastizität », *Annalen der Physik und Chemie*, 52, 1894, p. 534-555.
84. VOIGT. — « Betrachtungen über die Festigkeit bei homogener Deformation », *Annalen der Physik und Chemie* (Wiedemann), 53, 1894, p. 43-57.
85. FINGER. — « Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen der Deformation und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern, bei Berücksichtigung von Gliedern die bezüglich der Deformationselemente von dritter beziehungsweise zweiter Ordnung sind », *Wiener Berichte* (Math. Natur. Kl), 103, 1894, p. 163-200, 231-250, 1073.
86. COSSERAT. — « Sur la théorie de l'élasticité », *Annales de Toulouse*, 10, 1896, p. 116-224.

87. KELVIN (Lord). — « On the reflexion and refraction of solitary plane waves at a plane interface between two isotropic elastic mediums », *Philosophical Magazine*, 47, 1899, p. 179-191.
88. CHAPMAN. — « On the rate of explosions in gases », *Philosophical Magazine*, 47, 1899, p. 90-104.
89. WOLF. — « Über die bei Explosionen in der Luft eingeleiteten Vorgänge », *Annalen der Physik*, 69, 1899, p. 329-371.
90. VIEILLE. — « Sur les discontinuités produites par la détente brusque des gaz comprimés », *Comptes rendus*, 129, 1899, p. 1228-1230.
91. VIEILLE. — « Étude sur le rôle des discontinuités », *Mémorial des Poudres et des Salpêtres*, 10, 1900, p. 177-260.
92. VIEILLE. — « Étude sur le rôle des discontinuités dans les phénomènes de propagation », *Journal de Physique*, 9, 1900, p. 621.
93. VIEILLE. — Rôle de discontinuités dans la propagation des phénomènes explosifs », *Comptes rendus*, 131, 1900, p. 413.
94. LE CHATELIER. — « Sur la propagation des ondes condensées dans les gaz chauds », *Comptes rendus*, 131, 1900, p. 30-33.
95. LE CHATELIER-BERTHELOT. — « Sur la vitesse de détonation de l'acétylène », *Annales de Chimie et Physique*, 7^e série, 20, 1900, p. 15-26.
96. JOUGUET. — Notes aux *Comptes rendus* échelonnées de 1901 à 1910 :
 « Sur la propagation des discontinuités dans les fluides » 132, 1901, p. 672.
 « Remarques sur la propagation des percussions dans les gaz », 138, 1904, p. 1685.
 « Remarques sur la loi adiabatique d'Hugoniot », 139, 1904, p. 786.
 « Remarque sur les ondes de choc. Application à l'onde explosive », 144, 1907, p. 415.
 « Sur les fluides physiquement semblables », 145, 1907, p. 475.
 « Sur la vitesse des ondes de choc et combustion », 149, 1909, p. 1361.
 « Impossibilité de certaines ondes de choc et combustion », 150, 1910, p. 91.
97. JOUGUET. — « Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz », *Journal de Mathématiques*, 1, 1905, p. 347-425, 2, 1906, p. 5-86.
98. ZEMPLEN. — « Unstetige Bewegungen in Flüssigkeiten », *Enzyklopädie der math. Wissenschaften*, IV (2), 1903.
99. LOVE. — « Wave-motions with discontinuities at wave-fronts », *Proceedings of the London Math. Soc.* (2), 1, 1903, p. 37.
100. DUHEM. — « Recherches sur l'élasticité », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, (3), 21, p. 99-139, 1904, p. 375-414, 22, p. 143-217, 1905, 23, p. 169-223, 1906.
101. DUHEM. — Notes aux *Comptes rendus* de 1906 et 1907 :
 « Sur les quasi-ondes de choc et la distribution des températures en ces quasi-ondes », 142, 1906, p. 324.
 « Quelques lemmes relatifs aux quasi-ondes de choc », 142, 1906, p. 377.
 « Sur une inégalité importante dans l'étude des quasi-ondes de choc », 142, 1906, p. 491.
 « Sur les quasi-ondes de choc au sein des fluides mauvais conducteurs de la chaleur », 142, 1906, p. 612.
 « Sur les quasi-ondes de choc au sein d'un fluide bon conducteur de la chaleur », 142, 1906, p. 750.
 « Sur la propagation des quasi-ondes de choc », 144, 1907, p. 179.
 « Sur la propagation des ondes de choc au sein des fluides », *Zeitschrift für physikalische Chemie*, 69, 1909, p. 169-186.
102. ZEMPLEN. — « Sur l'impossibilité des ondes de choc négatives dans les gaz », *Comptes rendus*, 141, 1905, p. 710.
103. HOPKINSON. — « The effects of momentary stress in metals », *Proceedings of the Royal Society*, London, 74, 1905, p. 498-506.
104. DAUTRICHE. — « Sur les vitesses de déformation des explosifs », *Comptes rendus*, 143, 1906, p. 641-644.
105. EINSTEIN. — « Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen », *Annalen der Physik*, 19, 1906, p. 289-306, 34, 1911, p. 591-592.

106. PRANDTL. — « Zur Theorie des Verdichtungsstosses », *Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen*, 16, 1906, p. 241-245.
107. CRUSSARD. — « Ondes de choc et onde explosive », *Bulletin de la Société industrielle des Mines*, (4), 6, 1907, p. 1, 13.
108. POYNTING. — « On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears and the lengthening of loaded wires when twisted », *Proceedings of the Royal Society*, London, A 82, 1909, p. 546-589.
109. HAAR-VON KARMAN. — « Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien », *Göttinger Nachrichten*, 1909, p. 204-218.
110. TAYLOR. — « The conditions necessary for discontinuous motion in gases », *Proceedings of the Royal Society*, A 84, 1910, p. 371-377.
111. LE CHATELIER. — « Sur le développement et la propagation de l'onde explosive », *Comptes rendus*, 130, 1910, p. 1755-1761.
112. RAYLEIGH. — « Aerial plane waves of finite amplitude », *Proceedings of the Royal Society*, A 84, 1911, p. 247.
113. POYNTING. — « On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted and on the pressure of distortional waves in steel », *Proceedings of the Royal Society*, A86, 1912, p. 543-561.
114. TAMMANN. — « Über Zustandsgleichungen im Gebiete kleiner Volumen », *Annalen der Physik*, 37, 1912, p. 975.
115. TAFFANEL-DAUTRICHE. — « Sur la propagation de l'onde explosive dans les solides », *Comptes rendus*, 155, 1912, p. 1221.
116. TAFFANEL-DAUTRICHE. — « Sur la détonation de la dynamite », *Comptes rendus*, 155, 1912, p. 1595.
117. VON KARMAN. — « Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre », *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften IV*, 4, art. 31, 1913.
118. VON MISES. — « Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand », *Göttinger Nachrichten*, 1913, p. 582-592.
119. HOPKINSON. — « A method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosives by the impact of bullets », *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A 213, 1914, p. 437-457.
120. RUDENBERG. — « Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Impulsstärke von Verdichtungsstössen », *Artilleristische Monatshefte*, 113, 1916, p. 237.
121. WÖHLER-MARTIN. — « Die Initialwirkung von Aziden und Fulminaten », *Zeits. für das gesamte Schiess und Sprengstoffwesen*, (3), 12, 1917, p. 39.
122. BINGHAM-GREEN. — « Paint, a plastic material and not a viscous liquid », *Proceedings of the American Society of testing materials*, II, 19, 1919, p. 640-675.
123. BECKER. — « Eine Zustandsgleichung für Stickstoff bei hohen Dichten », *Zeitschrift für Physik*, 4, 1921, p. 393-409.
124. LOVE-PIDDOCK. — « Lagrange's Ballistic Problem », *Transactions of the Royal Society*, London, 222, 1922, pp. 167-226.
125. BECKER. — « Stosswelle und Detonationen », *Zeitschrift für Physik*, 8, 1922, pp. 321-362.
126. PRANDTL. — « Spannungsverteilung in plastischen Körpern », *I. internationaler Kongress für angewandte Mechanik*, Delft, 1924.
127. LAFFITTE. — « Recherches expérimentales sur l'onde explosive et sur l'onde de choc » (thèse), *Annales de Physique*, 3, 1925, pp. 587-694.
128. BRILLOUIN. — « Les lois de l'élasticité sous forme tensorielle valables pour des coordonnées quelconques », *Annales de Physique*, 3, 1925, pp. 251-298.
129. VON MISES. — « Bemerkungen zur Formulierung des mathematischen Problems der Plastizitätstheorie », *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 5, 1925, p. 147-149.
130. JOUGUET. — « Ondes de choc et de combustion avec combustion résiduelle irréversible », *Comptes rendus*, 181, 1925, p. 658.

131. JOUGUET. — « Théorie thermodynamique de la propagation des explosions », *Comptes rendus du 2^e Congrès international de Mécanique appliquée*, 1926.
132. JOUGUET. — « Remarques à propos des expériences de M. Brulot sur les ondes de choc aériennes », *Mémorial de l'Artillerie française*, VI, 1927, p. 259.
133. JONES. — « Photographic study of detonation in solid explosifs », *Proceedings of the Royal Society, A* 120, 1928, p. 603.
134. VON MISES. — « Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen », *Zeitschrift für angewandte Math. und Mech.*, 8, 1928, p. 161-185.
135. PRANDTL. — « Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie fester Körper », *Zeitschrift für angewandte Math. und Mech.*, 8, 1928, p. 85-106.
136. JENNE. — « Räumliche Spannungsverteilung in festen Körpern bei plastischer Deformationen », *Zeitschrift für angewandte Math. und Mech.*, 8, 1928, pp. 18-44.
137. TREFFTZ. — *Mathematische Elastizitätstheorie*, Julius Springer, 1928, Berlin.
138. VON MISES. — *Über die bisherigen Ansätze in der klassischen Mechanik der Kontinua*. III. Internationaler Kongress für angewandte Mechalik, Stockholm, 1930.
139. CRANZ-SCHARDIN. — « Kinematographie auf ruhendem Film mit hoher Bildfrequenz », *Zeitschrift für Physik*, 56, 1929, p. 147.
140. HENCKY. — « Das Superpositionsgesetz eines endlich deformierten relaxationsfähigen elastischen Kontinuums und seine Bedeutung für exakte Ableitung der Gleichungen für die zähe Flüssigkeit in der Eulerschen Form », *Annalen der Physik*, V, (2), 1929, p. 716-630.
141. HENCKY. — « Welche Umstände bedingen die Verfestigung bei der bildsamen Verformung von festen isotropen Körpern », *Zeitschrift für Physik*, 55, 1929, 145-155.
142. REUSS. — « Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie », *Zeitschrift für angewandte Math. und Mechanik*, 10, 1930, p. 266-274.
143. DONNELL. — « Longitudinal wave transmission and impact », *Transactions of the American Society of Metal Engineers*, 52, 1930, p. 153.

Bibliographie alphabétique (A)

1. ALLEN-RINEHART-WHITE. — « Phenomena associated with the flight of ultra-speed pellets. 1. Ballistics; 2. Spectral character of luminosity; 3. General features of luminosity », *J. Appl. Phys.*, 23, 1952, p. 132-198, 297.
2. ALLEN. — « Free surface motion induced by shock waves in steel », *J. Appl. Phys.*, 24, 1953, p. 1180.
3. ALLEN-MC CRARY. — « Experimental technique used to measure transient waves through solids », *Rev. Sci. Instr.*, 24, 1953, p. 165.
4. ALTER-CURTIS. — « Effect of strain rate on the propagation of a plastic strain pulse along a lead bar », *J. Appl. Phys.* 27, 1956, p. 1079.
5. ALVERSON. — « Impact with finite acceleration time of elastic and elastic-plastic beams », *J. Appl. Mech.*, 56, APM 1955, p. 14.
6. BECHERT. — « Zur Theorie ebener Störungen in reibungsfreien Gasen », 1^{re} partie, *An. d. Phys.*, V, 37, 1940, p. 89; 2^e partie, *An. d. Phys.*, V, 38, 1940, p. 1.
« Über die Ausbreitung von Zylinder- und Kugelwellen in reibungsfreien Gasen und Flüssigkeiten », *An. d. Phys.*, V, 39, 1941, p. 169.
« Über die Differentialgleichungen der Wellenausbreitung in Gasen », *An. d. Phys.*, V, 39, p. 355.
7. BERGEON-KIEFFER-VODAR. — « Équation d'état de l'argon aux très hautes pressions et sa compressibilité dans l'onde de choc », *J. Phys. Rad.*, 16, 1955, p. 813.
8. BETHE. — « The theory of shock waves for an arbitrary equation of state », *Office of scientific research and development (OSRD), report n° 545*, 1942.
9. BIRKHOFF-MAC DOUGALL-POUGH-TAYLOR. — « Explosives with lined cavities », *J. Appl. Phys.*, 19, 1948, p. 563.

10. BRIDGMAN. — « A complete collection of thermodynamic formulas », *Phys. Rev.*, III (4), 1914, 0. 273.
11. CABANNES. — « Sur la formation des ondes de choc », *Ann. Fac. Sci.*, Marseille, 22, 1953, p. 147.
12. CAQUOT. — « Definition du domaine élastique dans les corps isotropes », *Proc. of the 4th Congr. intern. Appl. mech.*, Cambridge, 1935, p. 24.
13. CHRISTIE-KOLSKY. — « The fracture produced in glass and plastics by the passage of stress waves », *Trans. Soc. Glass Techn.*, 36, 1952, p. 65.
14. CLARK-WOOD. — « The time delay for the initiation of plastic deformation at rapidly applied constant stress », *Proc. Amer. Soc. Testing Mat.*, 49, 1949, p. 717.
« The tensile impact properties of some metals and alloys », *Trans. Amer. Soc. of Met.*, 42, 1949, p. 45.
15. COTTER-RIVLIN. — « Tensors associated with time-dependent stress », *Quart. of Appl. Math.*, 13, 1955, p. 177.
16. DAPOIGNY-KIEFFER-VODAR. — « Quelques résultats sur la compression de l'eau dans une onde de choc », *Comptes rendus*, 238, 1954, p. 215.
« Les ondes de choc en milieu dense. II. Méthodes expérimentales et quelques résultats de mesures obtenus par la méthode de radiographie ultra-rapide », *J. des Rech. du C.N.R.S.*, 31, 1955, p. 260.
« Ondes de choc engendrées dans l'argon liquide et leur étude par radiographie ultra-rapide. Compression de l'argon aux très hautes pressions », *J. Phys. Rad.*, 16, 1955, p. 733.
« Compression de l'oxygène aux très hautes pressions par ondes de choc engendrées dans le liquide », *J. Phys. Rad.*, 17, 1956, p. 606.
« Étude de la compression des milieux denses à partir de la radiographie d'une onde de choc unique », *Comptes rendus*, 245, 1957, p. 1502.
« Effets transitoires et permanents induits dans le polyméthylacrylate de méthyle au contact d'explosifs puissants », *Comptes rendus*, 247, 1958, p. 269.
17. DAVIES. — « Critical study of the Hopkinson pressure bar », *Phys Trans. Roy. Soc.*, A 240, 1948, p. 375.
18. DEJUHASZ. — « Graphical analysis of impact of bars stressed above the elastic limit », *J. Franklin Inst.*, 248, (1), 1949, p. 14.
19. DEUKER. — « Beitrag zur Theorie endlicher Verformungen und zur Stabilitätstheorie des elastischen Körpers », *Deutsche Mathematik*, 1940, p. 546.
20. DEUTLER. — « Experimentelle Untersuchungen über die Abhängigkeit der Zugspannungen von der Verformungsgeschwindigkeit », *Phys. Zeits.*, 33, 1932, p. 247.
21. DRUCKER. — « A more fundamental approach to plastic stress-strain relations », *Proc. 1st Nat. Congr. Appl. Mech. U.S.A.*, Chicago, 1950, p. 487.
« Some implications of work-hardening and ideal plasticity », *Quart. Appl. Math.* VII (4), 1950, p. 411.
22. DUVAL-ZWOLINSKI. — « Entropic equations of state and their application to shock wave phenomena », *J. Acoust. Soc. Amer.* 27, 1955, p. 1054.
23. DUWEZ-CLARK. — « An experimental study of the propagation of plastic deformation under conditions of longitudinal impact », *Proc. Amer. Soc. for Test. Mat.* 47, 1947, p. 502.
24. EICHELBERGER-PUCH. — « Experimental verification of the theory of jet formation by charges with lined conical cavities », *J. Appl. Phys.*, 23, 1952, p. 537.
25. EICHELBERGER. — « Reexamination of the non-steady theory of jet formation by lined cavity charges », *J. Appl. Phys.*, 26, 1955, p. 388.
26. EVANS-TAYLOR. — « Deformation and fractures produced by intense stress pulses in steel », *Research* 5, 1952, p. 502.
27. FAY. — « Plane sound waves of finite amplitude », *J. Acoust. Soc.* octobre 1931, p. 222.
28. FEYNMAN-METROPOLIS-TELLER. — « Equations of state of elements based on the generalized Fermi-Thomas theory », *Phys. Rev.* 75, 1949, p. 1561.

29. FREEMAN. — « A theory of the stability of plane shock waves », *Proc. Roy. Soc.*, A228, 1955, p. 341.
30. FREUDENTHAL-GEIRINGER. — « The mathematical theories of the inelastic continuum », in *Handb. der Phys.* VI (voir bibl. livres).
31. FÜNFER-SCHALL. — « Erzeugung und Untersuchung extrem kurzdauernder Zustände », *Physikalisches Blatt* 8, 1952, p. 305.
32. GEIRINGER-PRAGER. — « Mechanik isotroper Körper im plastischen Zustand », *Erg. exakt. Naturwiss.* 13, 1934, p. 310.
33. GEIRINGER. — « Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes », *Mém. Sci. Math.* n° 86, Paris 1937.
34. GINNS. — « The mechanical properties of some metals and alloys broken at ultra high speeds », *J. Inst. of Met.* 61, 1937, p. 61.
35. GLAUS-LEE. — « Transient wave analysis in a linear time-dependant material », *J. Appl. Phys.* 25, 1954, p. 947.
36. GLEIZAL. — « General stress-strain laws of elasticity and plasticity », *J. Appl. Mech.* 68, 1946, p. A 261.
« A mathematical formulation of the general continuous deformation problem », *Quart. Appl. Math.* VI (4), 1942, p. 429.
37. GOLDSMITH. — « On longitudinal plane waves of elastic-plastic strain in solids », *J. Appl. Mech.* juin 1953, p. 307.
38. GORANSON et coll. — « Dynamic determination of the compressibility of metals », *J. Appl. Phys.* 26, 1955, 0. 1472.
39. GREEN-ZERNA. — « The theory of elasticity in general coordinates », *Phil. Mag.* (J) 41, 1950, p. 313.
40. HANDELMAN-LIN-PRAGER. — « On the mechanical behaviour of metals in the strain-hardening range », *Quart. Appl. Math.* IV (4), 1947, p. 397.
41. HERPIN. — « La physique des ondes de choc », *Revue scientifique*, 13, 1947, 0. 817.
« Théorie générale des ondes de choc », *Mém. Artill. Franç.* 24, 1950, p. 851.
42. HOLLOMAN. — « The mechanical equation of state », *Trans. Amer. Inst. of Mining and Met.* 171, 1947, p. 535.
43. HUGUES-PONDROM-MIMS. — « Transmission of elastic pulses in metal rods », *Phys. Rev.* 75, (10), 1945, p. 1552.
44. HUND. — « Materie unter sehr hohen Drucken », *Ergeb. exakt. Wiss.* 15, 1937, p. 189.
45. HUND. — « Notes on the exact equations governing the propagation of sound in fluids », *J. Acoust. Soc. Amer.* 27, (6), 1955, p. 1019.
46. JOUGUET. — « Sur les ondes de choc et les ondes continues de certains gaz », *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 716.
« Sur les ondes de choc produites dans un gaz par un explosif solide », *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1225.
« Commentaires sur la théorie des ondes de choc produites dans une atmosphère gazeuse par un explosif solide », *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 1320.
« Sur les ondes de choc produites dans une atmosphère gazeuse par la détonation des explosifs solides », *Mém. Art. Franç.*, 1947, p. 235.
47. VON KÄRMÄN. — « The engineer grapples with non-linear problems », *Bul. Amer. Math. Soc.*, 46, n° 8, 1940, p. 615.
« Compressibility effects in aerodynamics », *J. Aero. Sci.*, 8, (9), 1941, p. 337.
« Supersonic Aerodynamics », *J. Aero. Sci.*, 14, (7), 1947, p. 373.
48. VON KÄRMÄN-DUWEZ. — « The propagation of plastic deformation in solids », *J. Appl. Phys.*, 21, 1950, p. 987.
49. KAUDERER. — « Ein nichtlineares Elastizitätsgesetz; Aufbau und Anwendungsmöglichkeiten », *I.U.T.A.M.*, Madrid (voir bibl. livres).
50. KIEFFER. — « Sur l'existence et la forme des ondes permanentes planes en milieu continu », *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 1717.

51. KIEFFER-DAPOIGNY. — « Sur les ondes planes progressives en milieu continu », *J. Phys. Rad.*, 18, 1957, p. 359.
52. KIEFFER-DAPOIGNY-VODAR. — « Les ondes de choc en milieu dense », I. Rappel de quelques considérations théoriques, *J. des Rech. du C.N.R.S.*, 30, 1955, p. 137.
« Nature et processus de formation de l'onde de choc créée par la détonation d'un explosif », *Comptes rendus*, 247, 1958, p. 577.
53. KOLSKY. — « An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading », *Proc. Roy. Soc.*, 62, (7), 1949, p. 676.
« The propagation of stress pulses in visco-elastic solids », *Phil. Mag.*, (8), 1, 1956, p. 1.
54. KOLSKY, SHEARMAN. — « Investigation of fracture produced by transient stress waves », *Research*, 2, 1959, p. 384.
55. KOSKI, LUCY, SHREFFLER, WILLIG. — « Fast jets from collapsing cylinders », *J. Appl. Phys.*, 23, 1952, p. 1300.
56. LEE, KANTER. — « Wave propagation in finite rods of viscoelastic material », *J. Appl. Phys.*, 24, (9), 1953, p. 1115.
57. LEE. — « Wave propagation in anelastic materials », *I.U.T.A.M.*, Madrid (V. bibl. livres).
58. LEE, MORRISON. — « A comparison of the propagation of longitudinal waves in rods of viscoelastic material », *J. Polym. Sci.*, 19, (91), 1956, p. 93.
59. MAC LEMORE. — « Formation penetrating with shaped explosive charges », *Oil Weekly*, July 8 th 1946, U.S.A.
60. MALLORY. — « Propagation of shock waves in aluminium », *J. Appl. Phys.*, 26, 1955, p. 555.
61. MALVERN. — « Plastic wave propagation in a bar of material exhibiting a strain rate effect », *Quart. Appl. Math.*, 8, 1951, p. 404.
« The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain rate effect », *J. Appl. Phys.*, 1951, p. 203.
62. MANDEL. — « Sur les corps viscoélastiques à comportement linéaire », *Comptes rendus*, 1956.
« Sur les corps viscoélastiques à comportement linéaire », *Comptes rendus*, 1956.
63. MANJOINE, NADAI. — « High-speed tension tests at elevated temperatures », *Proc. Amer. Soc. Test. Mat.*, 40, 1940, p. 822.
64. MANN. — « High velocity tension impact tests », *Proc. Amer. Soc. Test. Mat.*, 36, 1936, p. 85.
65. MANSON. — « Sur les ondes de choc planes », *Comptes rendus*, 218, 1944, p. 927.
« Propagation des détonations et des déflagrations dans les mélanges gazeux », *Off. Nat. Et. et Rech. Aéron.*, Paris, 1947.
66. MILNE, THOMSON. — « Finite elastic deformations », *Proc. 7 th Int. Symp. Appl. Mech.*, 1948.
67. MINSHALL. — « Properties of elastic and plastic waves determined by pin contactors and crystals », *J. Appl. Phys.*, 26, 1955, p. 463.
68. MORRISON (J. L. M.). — « The influence of rate of strain in tension tests », *The Engineers*, 158, 1934, p. 183.
69. MORRISON (J. A.). — « Wave propagation in rods of Voigt material and visco-elastic materials with three-parameter models », *Quart. Appl. Math.*, 14, 1956, p. 153.
70. MURNAGHAN. — « Finite deformations of an elastic solid », *Amer. J. Math.*, 59, 1937, p. 235.
71. NADAI, MANJOINE. — « High speed tension tests at elevated temperatures », *J. Appl. Mech.*, 8, 1947, p. A77.
72. NEUBER. — « Die Grundgleichungen der elastischen Stabilität in allgemeinen Koordinaten und ihre Stabilität », *Z. angew. Math. Mech.*, 23, 1943, p. 321.
« Allgemeine Lösung des ebenen Plastizitätsproblems für beliebiges isotropes oder anisotropes Fließgesetz », *Z. ang. Math. Mech.*, 28, 1948, p. 253.
73. NOLL. — « On the continuity of the solid and fluid states », *J. Rat. Mech. Anal.*, 4, 1955, p. 3.

74. OLDROYD. — « On the formulation of rheological equations of state », *Proc. Roy. Soc., A* 200, 1950, p. 523.
75. PACK, EVANS, JAMES. — « The propagation of shock waves in steel and lead », *Proc. Roy. Soc.,* 60, 1948, p. 1.
76. PALM. — « Stress-strain relations for uniaxial loading », *Appl. Sci. Res., A* 1, (3), 1948, p. 198.
77. PARKER, FERGUSON. — « The effect of strain rate upon the tensile impact strength of some metals », *Trans. Amer. Soc. Met.*, mars 1942, p. 68.
78. PAYMAN et coll. — « Explosion waves and shock waves », *Proc. Roy. Soc., A* 132, 1931, p. 200, 148, 1934, p. 604, 158, 1936, p. 348, 163, 1937, p. 575, 186, 1946, p. 293.
79. PEARSON, RINEHART. — « Deformation and fracturing of thick-walled steel cylinders under explosive attack », *J. Appl. Phys.*, 23, 1952, p. 434.
80. PENNEY et coll. — « A discussion on detonation », *Proc. Roy. Soc., A* 204, 1950, p. 1.
81. PIPKIN, RIVLIN. — « Note on a paper: further remarks on the stress-deformation relations for isotropic materials », *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 1, 1958, p. 469.
82. PRAGER. — « Mécanique des solides isotropes au-delà du domaine élastique », *Mém. Sci. Math.* n° 87, Paris, Gauthiers-Villars, 1937.
 « A new mathematical theory of plasticity », *Istambul Unia.*, A 5, (3-4), 1940, p. 215.
 « Fundamental theorems of a new mathematical theory of plasticity », *Duke Math. J.*, 9, 1942, p. 228.
 « Strain-hardening under combined stress », *J. Appl. Phys.*, 16, 1945, p. 837.
 « An Introduction to the mathematical theory of plasticity », *J. Appl. Phys.*, 18, 1947, p. 375.
 « Theory of plastic flow versus theory of plastic deformation », *J. Appl. Phys.*, 19, 1948, p. 540.
 « Recent developments in the mathematical theory of plasticity », *J. Appl. Phys.*, 20, 1949, p. 235.
 « Finite plastic deformation », in *Eirich (F.R.) Rheology*, vol. 1 (voir bibl. livres).
83. PRANDTL. — « Allgemeine Überlegungen über die Strömung zusammendrückbarer Flüssigkeiten », *Zeits. f. angew. Math. und Mech.*, 16, 1936, p. 129.
84. PUGH, EICHELBERGER, ROSTOKER. — « Theory of jet formation by charges with lined conical cavities », *J. Appl. Phys.*, 23, 1952, p. 532.
85. REINER, ROSCOE. — « Mechanical models for the representation of visco-elastic properties », *Brit. J. Appl. Phys.*, 1, 1950, p. 332.
86. REINER. — « A mathematical theory of dilatancy », *Amer. J. Math.*, 67, p. 350, 1945.
 « Elasticity beyond the elastic limit », *Amer. J. Math.*, 70, 1948, p. 433.
 « The complete elasticity law for some metals according to Poyntings observations », *Appl. Sci. Res.*, A 5, 1954, p. 281.
 « Second-order effects in infinitesimal elasticity », *I.U.T.A.M.* Madrid, 1955.
 « Phenomenological Macro-rheology », in *Eirich (F.R.) Rheology*, vol. 1 (voir bibl. livres).
 « Rheology », *Handb. d. Phys.* VI (voir bibl. livres).
87. RICE, WALSH. — « Equation of state of water to 250 kilobars », *J. Appl. Phys.* 26, (4), 1957, p. 824.
88. RICHTER. — « Das isotrope Elastizitätsgesetz », *Z. angew. Math. Mech.*, 28, 1948, p. 205.
 « Verzerrungstensor, Verzerrungsdeviator und Spannungstensor bei endlicher Formänderung », *Z. angew. Math. Mech.*, 29, 1949, p. 65.
 « Elastoplastische Reflexion eines Stabes », *Z. angew. Math. Mech.*, 33, 1953, p. 237.
89. RINEHART. — « Explosive forces widen metallurgical studies », *Steel*, 127, 1950, p. 98.
 « Some quantitative data concerning scabbing of metals », *J. Appl. Phys.*, 22, 1951, p. 555.
 « Some experimental indications of the stresses produced in a body by an explosive charge », *J. Appl. Phys.*, 22, 1951, p. 1178.
 « Scabbing of metals under explosive attack; multiple scabbing », *J. Appl. Phys.*, 23, 1952, p. 1229.
 « Guide to the successful propulsion of a solid object by an explosive charge », *J. Appl. Phys.*, 23, (6), 1952, p. 685.

90. RINEHART, PEARSON. — « Conical surfaces of fracture produced by asymmetrical impulsive loading », *J. Appl. Phys.*, 23, (6), 1952, p. 685.
 « Engraving of transient stress wave particle velocities », *J. Appl. Phys.*, 24, (4), 1953, p. 462.
91. RIVLIN. — « The hydrodynamics of non-newtonian fluids », I, *Proc. Roy. Soc., A* 193, 1948, p. 260.
 « Large elastic deformations of isotropic materials », *Phil. Trans. Roy. Soc., A* 240, 1948, p. 459 et *A* 241, 1948, p. 379.
 « The solution of problems in second order elasticity th. », *J. Rat. Mech. Anal.*, 2, 1953, p. 53.
 « Further remarks on the stress-deformation relations for one isotropic material », *J. Rat. Mech. Anal.*, 4, 1955, p. 681.
 « Solution of some problems in the exact theory of visco-elasticity », *J. Rat. Mech. Anal.*, 5, 1956, p. 179.
 « Large elastic deformations », in *Eirich (F.R.) Rheology* (voir bibl. livres).
92. RIVLIN, ERICKSEN. — « Stress-deformation relations for isotropic materials », *J. Rat. Mech. Anal.*, 4, 1955, p. 323.
93. RUBIN. — « Propagation of longitudinal deformation waves in a prestressed rod of material exhibiting a strain-rate effect », *J. Appl. Phys.*, 25, (4), 1954, p. 528.
94. SCHAAFS. — « Die Schwächung von Röntgenstrahlung in hochverdichteter flüssiger Materie », *Z. für Phys.*, 137, 1954, p. 200.
95. SCHALL. — « Die Zustandsgleichung des Wassers bei hohen Drucken nach Röntgenblitz-aufnahmen intensiver Stosswellen », *Z. angew. Phys.*, 2, 1950, p. 252.
 « Röntgenblitzuntersuchungen bei nichtidealen Detonationswellen », *Z. angew. Phys.*, 4, 1952, p. 291.
 « Röntgenblitzrohre in Betrieb und Anwendung », *Arch. für technisches Messen*, 74, 13, 1953, p. 117.
96. SCHALL, THOMER. — « Röntgenblitzaufnahmen von Stosswellen in festen, flüssigen und gasförmigen Medien », *Z. ang. Phys.*, 3, 1951, p. 41.
 « Zur Frage der Röntgenabsorption in komprimierten Flüssigkeiten », *Z. für Phys.*, 142, 1955, p. 637.
97. SCHAR DIN. — « Ergebnisse der kinematischen Untersuchung des Glasbruchvorganges », *Glastechn. Berichte*, 23, 1950, p. 1, 67, 325.
98. SCHEIDEGGER. — « Finite displacements in rheological bodies ». *Can. J. of Phys.*, 34, 1956, 498.
99. SCHUBERT. — « Zur Theorie des stationären Verdichtungsstosses », *Z. angew. Math. Mech.*, 23, 1943, p. 129.
100. SEEGER, POLACKEK. — « Shock-wave phenomena in waterlike substances », *J. Appl. Phys.*, 22, (5), 1951, p. 640.
101. SHARPE. — « The production of elastic waves by explosive pressures », I. Theory and empirical field observations, *Geophysics*, 7, 1942, p. 144.
102. SHIELD, ZIEGLER. — « On Prager's hardening rule », *J. Appl. Math. Mech.*, (10a), 3, 1958, p. 260.
103. SHREFFLER, DEAL. — « Free surface properties of explosive-driven metal plates », *J. Appl. Phys.*, 24, 1953, p. 44.
104. SIPS. — « Propagation phenomena in elastic-viscous media », *idem*, 6, 1950, p. 285.
 « General theory of deformation of visco-elastic substances », *J. Polym. Sci.*, 7, 1950, p. 191.
105. SNEDDON, BERRY. — « The classical theory of elasticity », *Handb. der Physik*, 6, 1958 (voir bibl. livres).
106. SHEPHERD. — « Plastic stress-strain relations », *Ins. Mech. Eng., Appl. Mech.*, 159, 1958, p. 95.
107. SPENCER-RIVLIN. — « The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua », *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2, 1959, p. 309.
108. STERNE. — « A note on collapsing cylindrical shells », *J. Appl. Phys.*, 21, 1950, p. 73.

109. STERNGLASS, STUART. — « An experimental study of the propagation of transient longitudinal deformation in elastoplastic media », *J. Appl. Mech.*, septembre 1953, p. 427.
110. STORCHI. — « Sul' equazione fondamentale della plasticita piana », *Ist. Lombardo Sci. e Let., Rendiconti*, 86, 1953, p. 694.
111. SYMONDS. — « On the general equations of problems of axial symmetry in the theory of plasticity », *Quart. Appl. Math.*, 6, 1949, p. 448.
112. TAYLOR. — « Recent work on the flow of compressible fluids », *J. of the London Math. Soc.*, 5, 1940, p. 224.
 « The mechanism of plastic deformation of crystals », I. Theoretical, *Proc. Roy. Soc.*, A145, 1943, p. 362.
 « Plastic strain in metals », *J. Int. Met.*, 62, 1938, p. 307.
 « The testing of materials at high rates of loading », *J. Inst. Civ. Eng.*, 26, 1946, p. 486.
 « A connexion between the criterion of yield and the strain-ratio relationship in plastic solids », *Proc. Roy. Soc.*, A 191, 1947, p. 441.
 « The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress », *Proc. Roy. Soc.*, 194, 1948, p. 289.
 « The dynamics of the combustion products behind plane and spherical detonation fronts in explosives », *Proc. Roy. Soc.*, A 200, 1949, p. 235.
 « The formation of a blast wave by a very intense explosion », I. Theoretical discussion, *Proc. Roy. Soc.*, A 201, 1950, p. 159.
113. TESSON. — Thèse Paris 1947, Gauthier-Villars; 1^{er} sujet : « Contribution théorique et expérimentale à l'étude des courants supersoniques; 2^e sujet : « Les discontinuités en régime supersonique et torrentiel ».
114. THOMAS (C. H.). — « Note on Becker's theory of the shock front », *J. Chem. Phys.*, 12, 1944, p. 449.
115. THOMAS (Y. Y.). — « On curved shock waves », *J. Math. and Phys.*, 26, 1947, p. 62.
 « On the stability and instability of shock waves », *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 34, 1948, p. 526.
 « The fundamental hydrodynamical equations and the shock conditions for gases », *Math. Mag.*, 22, 1949, p. 169.
 « Interdependence of the yield condition and the stress-strain relations for plastic flow », *Proc. Nat. Acad. Sci.*, U.S.A., 40, 1954, p. 593.
 « On the structure of the stress-strain relations », *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 41, 1955, p. 716.
 « Kinematically preferred coordinate systems », *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 41, 1955, p. 762.
 « Combined elastic and von Mises stress-strain relations », *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 41, 1955, p. 908.
 « On the propagation of weak discontinuities in perfectly plastic solids », *J. Math. Mech.*, 6, 1957, p. 67.
116. THOMPSON. — « On the theory of viscoelasticity », *Phil. Trans.*, 231, 1933, p. 339.
117. TRAVERS. — « État actuel et valeur de la théorie thermodynamique des explosions et chocs », *Mémor. de l'Art. Franç.*, 24, (2), 1950, p. 441, 24, (3), 1950, p. 487, 25, (2), 1951, p. 421, 25, (3), 1951, p. 505.
118. VAN VALKENBERG, HENDRICKS. — « Method for producing high velocity metallic and plastic pellets », *J. Appl. Phys.*, 26, 1955, p. 776.
119. VAN VALKENBERG, CLAY, HUTH. — Impact phenomena at high speeds », *J. Appl. Phys.*, 27, 1956, p. 1123.
120. WALSH, SHREFFLER, WILLIG. — « Limiting conditions for jets formation in high velocity collisions », *J. Appl. Phys.*, 23, 1953, p. 349.
121. WALSH, CHRISTIAN. — « Equation of state of metals from shock wave measurements », *Phys. Rev.*, 97, 1955, p. 1544.
122. WALSH, RICE. — « Dynamic compression of liquids from measurements on strong shock waves », *J. Appl. Phys.*, 26, 1957, p. 815.
123. WEYL. — « Shock waves in arbitrary fluids », *Comm. on pure and Appl. Mech.*, II (2-3), 1949, p. 013.
124. WHIFFIN. — « The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield-stress », II. Tests on various metallic materials, *Proc. Roy. Soc.*, A 194, 1948, p. 300.

125. WHITE, VAN GRIFFIS. — « The permanent strain in a uniform bar due to longitudinal impact », *J. Appl. Mech.*, 14, (4), 1947, p. A337.
« The propagation of plasticity in uniaxial compression », *J. Appl. Mech.*, 15, (3), 1948, p. 256.
126. WOOD. — « On longitudinal plane waves of elastic-plastic strain in solids », *J. Appl. Mech.*, 19, 1952, p. 521.
127. ZAREMBA. — « Sur une conception nouvelle des forces intérieures dans un fluide en mouvement », *Mém. Sci. Math.*, n° 82, Paris, 1937.
128. ZENER, HOLLOMON. — « Plastic flow and rupture of metals », *Trans. Amer. Soc. for Metals*, 33, 1944, p. 163.
129. BURCKHART. — « Zustandsgleichung für Wasser bei sehr hohen Drucken und Geschwindigkeit einer Stosswelle in Wasser », Laboratoire d'Études balistiques de Saint-Louis, *Rapport 3a*, 1941.
130. ZOLLER. — « Struktur des Verdichtungsstosses », *Zeits für Physik*, 130, (2), 1951, p. 1.
131. KOHLER. — « Théorie moléculaire de l'onde de choc », Laboratoire d'Études balistiques de Saint-Louis, *Rapports 34*, 1946, 8, 1947, 16, 1948.
132. MILLSAPS. — « The linear acceleration of large masses by electrical means », *Hollman Air Development Center, Operations Research office, Techn. n° 3*.
133. BOSTICK. — « Plasma Motors », *IX^e Congrès international d'Astronautique, Amsterdam*, 1958, Springer, 1959.
134. VON KÄRMÄN. — « Magnetofluidmechanics », *IX^e Congrès international d'Astronautique, Amsterdam*, 1958, Springer, 1959.
135. BERGEON. — « Le compresseur balistique », *Mém. Art. fr.*, 33, (3), p. 603-637, 1959.
136. COOK-KEYES. — « Generation of high-velocity projectiles », *J. Applied Phys.*, 29, (12), 1958, p. 1651-1657.
137. WENTORF-BUCKLER, HIRSCHFELDER, CURTISS. — « Equation d'état pour fluides denses », *J. Chemical Phys.*, 18, p. 1484, 1950.
138. MOTT, SMITH. — « Structure de l'onde de choc », *Phys. Rev.*, 82, 1951, p. 885.
139. VON NEUMANN-RICHTMYER. — « A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks », *J. Appl. Phys.*, 21, 1950, p. 232.



DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

**PROPAGATION DES ONDES
EN MAGNÉTODYNAMIQUE DES FLUIDES**

Vu et approuvé :

Paris, le 5 décembre 1959

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PÉRÈS

Le Recteur de l'Académie de Paris

Vu et permis d'imprimer :

JEAN SARRAILH

